Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège.

Jeanne Bolon

UNIVERSITÉ RENÉ DESCARTES
(PARIS V)
SCIENCES HUMAINES SORBONNE

COMMENT LES ENSEIGNANTS TIRENT-ILS PARTI DES RECHERCHES FAITES EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ? LE CAS DE L'ENSEIGNEMENT DES DÉCIMAUX A LA CHARNIÈRE ÉCOLE-COLLÈGE

Jeanne BOLON

Thèse présentée en vue de l'obtention du doctorat

Directeur de recherche : Gérard VERGNAUD

1996

Beaucoup ont contribué à la réflexion qui a conduit à cette thèse :

André Revuz et Pierre Samuel, qui ont semé le goût de la recherche
et la curiosité pour les problèmes d'enseignement,
les équipes des instituts de recherche sur l'enseignement mathématique
de Bordeaux, Grenoble, Paris VII, Paris-Nord et Strasbourg, l'équipe du centre d'observation
et de recherche sur l'enseignement mathématique de Talence,
qui ont accueilli les premières questions,
Gérard Vergnaud, directeur de recherche patient et stimulant,
les collègues enseignants des classes associées à l'expérimentation,
leurs inspecteurs, leurs conseillers pédagogiques,
l'institut universitaire de formation des maîtres de Versailles,
les nombreux collègues et amis qui ont lu et relu les brouillons successifs,
ils retrouveront la marque de leur influence dans les pages qui suivent.

Qu'ils soient tous remerciés !

A Claire

Rien, logiquement, ne distingue les nombres décimaux des nombres entiers ; aussi leur étude, suite immédiate de ce qu'on sait déjà, les calculs où ils interviennent, analogues à ceux qu'on a souvent exécutés, n'embarrassent guère les élèves.

(Instructions officielles pour le cours moyen, 1923)

SOMMAIRE

INTRODUCTION

La formation initiale et continue des enseignants du premier degré fournit de nombreuses occasions d'échanges entre collègues (débutants ou expérimentés) sur l'enseignement des décimaux. Selon eux, certaines erreurs d'élèves se maintiennent, en dépit de toutes les astuces pédagogiques auxquelles ils recourent. Par exemple, ils observent que l'utilisation du tableau décimal avec placement de la virgule au rang des unités permet aux enfants de réussir, mais que, une fois cette béquille enlevée, les erreurs surgissent à nouveau. Leurs questions aux formateurs se font souvent pressantes : quelle solution auriez-vous à proposer ?

Le rôle de formateur suppose en effet de fournir, sur la base d'études et travaux antérieurs, des explications sur les difficultés des élèves et des propositions pédagogiques pour les surmonter. Il est facile de montrer que le problème a un caractère général : de nombreuses enquêtes statistiques, en France et à l'étranger [1], montrent que les performances des élèves et même d'adultes [2] ne sont pas très bonnes à propos des décimaux. Ce constat risque d'être décourageant s'il n'est pas accompagné de propositions de solutions, au moins partielles. De nombreuses tentatives ont eu lieu dès les années 1970 dans le cadre de l'institut pédagogique national [3] et les instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques [4]. Une mention spéciale doit être faite aux recherches faites dans le cadre de la didactique des mathématiques par Guy Brousseau (Bordeaux) et Régine Douady et Marie-Jeanne Perrin (Paris) : ces travaux sont importants tout d'abord en raison de la méthodologie de recherche qu'ils ont utilisée, l'ingénierie didactique [5], ensuite pour les avancées théoriques qu'ils ont permises au plan de la didactique de mathématiques, enfin pour le thème des décimaux qu'ils ont clarifié.

Traduire ces travaux en termes d'action quotidienne pour les enseignants du premier degré avec qui nous travaillons, ce n'était pas a priori une tâche aisée, même si nous connaissions les adaptations déjà faites, comme celle de l'équipe de mathématiques de l'institut national de recherche pédagogique

---

[1] Voir par exemple la base de données constituée par l'équipe EVAPM à l'IREM de Besançon, coordonnée par A. Bodin.

[2] Voir NEYRET, R. (1995), *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants*, thèse , Université J. Fourier, Grenoble 1.

[3] Émission de télévision scolaire de Nicole Picard, 1970.

[4] *Revue Grand N* (1981), n° spécial , Mathématiques pour le cycle moyen, tome 1.

[5] Voir définition p. 16.

(1982) [6]. Quelques années plus tard (1986, 1987), après la parution des documents que les auteurs des recherches en didactique avaient rédigés à l'intention des enseignants, nous pensions pouvoir rédiger facilement une suite de séquences destinées à des collègues formateurs du premier degré. Or au fur et à mesure de la rédaction, l'entreprise semblait devenir de plus en plus complexe : était-il possible d'enseigner les décimaux dans les conditions ordinaires des classes [7] ? pourquoi les ingénieries didactiques, mises en œuvre plusieurs années de suite avec des élèves ordinaires dans des écoles dont les caractéristiques particulières n'avaient rien d'extrêmes, étaient-elles si difficiles à reproduire ? Ce sont ces questions, cruciales pour un formateur situé entre pratiques ordinaires et recherche, qui ont provoqué le travail d'analyse décrit dans les pages qui suivent.

---

6 ERMEL (1982), *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*, CM, tome 2, PARIS: Hatier. Voir en particulier le chapitre A et la voie n° 2 du chapitre B1.

7 Exposé que nous avons fait à Dijon auprès de formateurs du premier degré et conseillers pédagogiques du second degré (novembre 1993) sous le titre *L'enseignement des décimaux est-il possible ?*.

Chapitre I

CADRE THÉORIQUE ET CHOIX MÉTHODOLOGIQUES

Au premier abord, la question que nous nous posions paraît assez banale, récurrente même dans les milieux d'innovation pédagogique. Les articles abondent sur la généralisation d'innovations, mais les discours sont divergents selon les angles d'attaque.

1- Repérage du champ

Examinons tout d'abord la place de l'innovation, dans le cadre de la didactique des mathématiques, puis dans le domaine des sciences de l'éducation.

1.1- Innovation spontanée et culture professionnelle

En didactique des mathématiques, Brousseau (1981) a souligné, dès ses premiers travaux, ce qu'il a appelé l'obsolescence des situations pédagogiques.

> L'hypothèse de reproduction du même processus doit être envisagée principalement contre les deux suivantes :
> 1) celle d'une amélioration locale,
> 2) celle d'une obsolescence des situations didactiques.
>
> Nous entendons par obsolescence le phénomène suivant : les maîtres, d'une année à l'autre, ont de plus en plus de mal à reproduire les conditions susceptibles d'engendrer chez leurs élèves, à travers peut-être des réactions différentes, une même compréhension de la notion enseignée. Au lieu de reproduire des conditions qui tout en produisant le même résultat laissent libres les trajectoires, ils reproduisent au contraire une "histoire", un déroulement semblable à celui des années précédentes, par des interventions, qui, même discrètes, dénaturent les conditions didactiques garantes d'une signification correcte des réactions des élèves : les comportements obtenus sont apparemment les mêmes mais les conditions dans lesquelles ils ont été obtenus en modifient le sens, plus proche du comportement culturel. [1]

Les situations pédagogiques vieillissent. Vient un jour où l'enseignant ne veut plus les utiliser et invente quelque chose de neuf.

> Il est indispensable que tout enseignant, chaque jour, commence sa classe comme si les connaissances qu'il propose à ses élèves étaient découvertes pour la première fois (...) comme si cette rencontre était décisive pour... l'avenir de l'humanité. (...)

[1] Cité par ARTIGUE, M. (1990), Ingénierie didactique, *Recherches en didactique des mathématiques ,vol. 9, 3 ,* 281-308.

Les moyens de lutter contre ces vieillissements sont des renouvellements dans les différentes branches du contrat, dans les rapports avec l'élève, dans les rapports avec le savoir et avec la communauté des mathématiciens, dans les rapports avec les situations d'enseignement.
(...) l'innovation (...) est un des moyens les moins arbitraires offerts au professeur pour retrouver sa fraîcheur en danger de se perdre parce qu'elle est supposée agir sur l'acte d'enseigner lui-même. Elle apparaît donc comme une nécessité impérieuse au niveau de chaque professeur. [2]

Pour Brousseau, l'innovation est donc individuellement un processus spontané. Il pourrait contribuer, dans certains cas, à la création d'une culture professionnelle collective, dont les mécanismes ne sont pas faciles à élucider. Citons des exemples, relativement récents, d'intégration à la culture du milieu enseignant.

Dans les programmes officiels de 1945, le signe "=" séparait à gauche un calcul à exécuter du résultat inscrit à droite (sens utilisé aujourd'hui par les calculatrices). Avec les programmes officiels de 1970, il est devenu licite d'écrire $7 + 4 = 5 + 6$, le signe d'égalité ayant ici une valeur qu'on pourrait déclarer "algébrique" puisque $7 + 4$ et $5 + 6$ désignent le même nombre (deux manières de décrire le même nombre). Les manuels ont utilisé le signe "=" dans sa nouvelle acception et les enseignants l'ont repris.

Citons, toujours à l'école primaire, la perte de la mention des unités de grandeurs dans les égalités. Avant 1970, pour décrire le calcul fait pour obtenir le prix de 3 kilogrammes à 2 F le kg, on écrivait 2 F x 3 = 6 F (trois fois deux francs) [3]. Après 1970, en conformité avec les recommandations jointes aux programmes officiels, les manuels ont séparé le texte en français et la ligne de calcul :

Prix en F
2 x 3 = 6

Les enseignants ont repris cette disposition [4].

Citons encore, dans l'enseignement secondaire, l'introduction de tableaux de proportionnalité, qui ont remplacé l'énonciation en langue naturelle de la "règle de trois".

Ces exemples montrent que s'il y a oscillation individuelle, localisée dans le temps, il y a néanmoins des exemples de pratiques collectivement stables sur une période de durée plus élevée, et, sur de longues périodes, des évolutions qui marquent la culture professionnelle d'une époque.

1.2- Entre changements souhaités et réalité du métier

Plusieurs chercheurs notent, au contraire, la stabilité des comportements des enseignants. Crahay (1989) a étudié en particulier les innovations souhaitées par l'Éducation Nouvelle, un "rêve vieux de près d'un siècle...", note-t-il. Peu de choses ont bougé, en dépit de discours favorables au

2 Cité par MARGOLINAS, C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques,* Grenoble: La pensée sauvage, p. 232.

3 Cette égalité ne respecte pas ce que les physiciens appellent les équations aux dimensions : il faudrait, en effet, écrire 2 F/kg x 3 kg = 2 F, à la manière des étiquettes produites par les balances automatiques de marché. Voir BOLON, J. (1993-94), Deux fois trois est-il égal à trois fois deux ? Histoire d'un malentendu, *Grand N n° 54,* 21 - 25.

4 Nous avons montré également la fragilité des évolutions en ce qui concerne les écritures multiplicatives : beaucoup d'enseignants que nous rencontrons font lire différemment 2 x 3 (trois fois deux) et 3 x 2 (deux fois trois), ne reconnaissant plus le même nombre derrière les écritures différentes.

développement d'inter-actions entre maître et élèves [5]. Il cite à son appui de nombreuses recherches. Nous en extrayons celle de De Landsheere (1969) qui porte sur l'analyse des interventions des enseignants en classe.

> G. De Landsheere considère, en effet, que "le professeur peut :
> - *Organiser* la classe pour permettre le travail. Par exemple, il indique les déplacements, fixe les procédures, règle la participation des élèves...
> - *Imposer* des informations, des problèmes, des réponses, des opinions, une aide..
> - *Développer* les apports spontanés des élèves.
> - *Personnaliser* ou individualiser la situation d'enseignement. par exemple, en faisant appel à l'expérience personnelle et extra-scolaire des enfants...
> - *Évaluer* positivement ou négativement les performances des élèves.
> - *Exprimer* une réaction affective, positive ou négative à propos du comportement de ses élèves."

Les résultats ont surpris De Landsheere.

> "Les résultats des analyses nous ont surpris tant par leur homogénéité que par leur répartition. Vu la tendance méthodologique affirmée dans l'enseignement primaire belge depuis une trentaine d'années, nous nous attendions à un enseignement beaucoup plus centré sur l'enfant."

Il y a donc un décalage entre ce qui est déclaré souhaitable pour l'enseignement (pédagogie du projet, centrée sur l'enfant) et ce qui se passe en réalité. Faut-il incriminer les enseignants ? Pour Crahay, suivant d'autres chercheurs (Doyle, 1970, Ponder, 1975, Clark, 1986), au lieu de parler de résistance au changement que manifesteraient les enseignants, il faut changer de paradigme : étudier les contraintes qui pèsent sur les enseignants et leurs marges de manoeuvre, dans une perspective écologique qui intègre en particulier les demandes du corps social, les attentes de l'institution, les habitudes des élèves... Pour Crahay, de telles recherches sur les relations de dépendance entre caractéristiques de situations et conduites d'enseignement sont un préalable nécessaire à toute tentative de transformation de la pratique des enseignants. Dans le paradigme antérieur, la plupart des recherches s'attachaient à neutraliser les variables de contexte : c'était la variabilité inter-maître qui était privilégiée. Citant Doyle et Ponder, Crahay se place dans la position inverse :

> En classe, ce n'est pas le maître qui contrôle la situation, mais la situation qui contrôle le maître.

Crahay développe :

> - Les conduites interactives des maîtres résultent rarement d'une décision prise en toute rationalité.
> - Les conduites d'enseignement des maîtres varient d'une situation à l'autre et ceci indépendamment de leurs caractéristiques personnelles.
> - Si on modifie les paramètres de la situation d'enseignement, on modifiera par le fait même la nature des échanges maître-élèves.
>
> Hypothèses osées, en première apparence, mais confirmées par une série de travaux empiriques.

---

5 CRAHAY, M. (1989), Contraintes de situation et interactions maître-élève : changer sa manière d'enseigner, est-ce possible ?, *Revue Française de Pédagogie n° 88*, 67-94.

Crahay présente plusieurs recherches qu'il a conduites dans cet esprit, dont une en collaboration avec E. Ceyssens (1986). Ils ont fourni à un enseignant des plans de leçon en grammaire française. Ces plans prévoyaient des phases de travail individuel avec support didactique, démarche dont ils avaient repéré qu'elle augmentait les dialogues maître-élèves. Les tâches étaient conçues de telle sorte que les élèves devaient répondre à des questions d'analyse ou synthèse. Les chercheurs ont constaté chez l'enseignant une augmentation des feedbacks spécifiques entre maître et élèves (feedbacks qui concernent les procédures des élèves), alors qu'aucune recommandation ne lui avait été faite. Crahay en tire la conclusion qu'il est possible de faire évoluer individuellement les comportements des enseignants pendant les phases de travail individuel, en agissant par le biais de la planification de leur enseignement. En revanche, il lui semble que les comportements des enseignants en phase collective sont stables.

Remarquons le "jeu" très limité des enseignants dans les expérimentations de Crahay : leurs dialogues avec les élèves deviennent plus efficaces dans les phases de travail individuel avec support didactique. L'indicateur choisi par Crahay porte sur le nombre et la qualité des échanges maître-élèves. Il ne fournit aucune indication sur la nature des exercices de travail individuel ("tâche d'analyse et de synthèse") ou les progrès des élèves en termes d'apprentissage. Tout se passe comme si les modifications des comportements des enseignants garantissaient un meilleur apprentissage des élèves, quels que soient les concepts en jeu, ce sur quoi nous nous interrogeons. En revanche, l'analyse du comportement enseignant en termes de contraintes, marges de manoeuvre, décisions (pas forcément rationnelles mais sûrement "économiques" en termes d'énergie...), nous parait rejoindre beaucoup de travaux faits en didactique des mathématiques.

1.3- Les ingénieries de la didactique des mathématiques : le rôle de l'enseignant

Tout d'abord, précisons ce que nous entendons par *ingénierie didactique.*

D'après Artigue (1984), la notion d'ingénierie didactique a émergé dès les années 1980[6]. L'ingénierie didactique n'est pas une innovation, mais une méthodologie de recherche, répondant au problème des actions possibles sur le système d'enseignement. Cette méthodologie se caractérise par les points suivants :

- des analyses préalables sont faites sur les pratiques scolaires et les comportements des élèves, un schéma expérimental est basé sur des "réalisations didactiques en classe", ce schéma incluant la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement ,
- la recherche est validée non pas selon la méthode des groupes-témoins, mais de manière interne, par comparaison entre l'analyse a priori des séquences et leur analyse a posteriori,
- l'objet de la recherche peut viser l'étude des processus d'apprentissage d'un concept donné, mais peut aussi traiter de questions transverses aux contenus, même si leur support est l'enseignement d'un domaine précis.

On voit donc que, dans l'ingénierie, la production de séquences d'enseignement n'est qu'un aspect partiel des recherches.

6 Les lignes qui suivent sont directement inspirées de ARTIGUE M. (1990),op.cit.

Artigue note que les séquences d'enseignement reposent essentiellement sur des situations a-didactiques où l'élève est dans la position d'un chercheur, c'est-à-dire avec la conscience d'engager uniquement un raisonnement mathématique[7] : les descriptions font peu de place à l'enseignant. Il est entendu que l'enseignant établit un contrat didactique permettant le fonctionnement de telles situations a-didactiques, et en particulier leur dévolution. Pour Artigue, le peu de place faite dans les premières ingénieries à l'analyse du rôle de l'enseignant a des raisons historiques : il fallait redonner la place à l'élève. Mais la méthodologie d'ingénierie, plongeant "le chercheur dans la complexité du système qu'il étudiait", a permis la prise en compte de nouveaux phénomènes didactiques, comme l'institutionnalisation et la mémoire de la classe. Artigue en souligne d'autres.
- Dans le schéma expérimental de l'ingénierie, un ou plusieurs enseignants sont chargés de l'exécution des séquences décrites préalablement : le processus de transmission ne va pas de soi.
- En tant que champ scientifique, la didactique des mathématiques doit pouvoir identifier des phénomènes "reproductibles", adjectif dont le sens ne peut être importé directement de sciences expérimentales classiques.

Artigue distingue deux types de reproductibilité :
- une reproductibilité *externe*, dynamique, se situant au niveau des "histoires", que nous qualifions de reproduction de surface ; elle va de pair avec des interventions de l'enseignant, plus ou moins conscientes : par exemple, augmentation du nombre de problèmes fermés, diminution de réussites aux questions les plus ouvertes, "coups de pouce" qui orientent les activités des élèves,

- une reproductibilité *interne*, moins facile à identifier, qui, pour elle, se situe au niveau du sens.

Sur la transmission de séquences, elle cite les travaux d'Arsac, Balacheff & Mante (1992) [8]. Ils montrent que la dévolution des situations a-didactiques n'est pas toujours assurée : la situation peut être vécue par les élèves comme une situation didactique ordinaire, où les intentions d'apprendre (pour l'élève) et d'enseigner (pour le maître) s'affichent, ce que Grenier (1988) avait déjà observé [9]. Le contrat lui-même peut changer, d'un moment à l'autre, ou d'un élève à l'autre, suivant la nature des interventions et les coutumes antérieures de la classe. Citons un exemple d'écart entre un scénario préparé par des chercheurs et son exécution par des enseignants, à propos d'une séance de débat de preuve en classe de quatrième.

Les enseignants exécutants avaient été choisis parce que les chercheurs supposaient chez eux des conceptions de l'apprentissage, des conceptions sur les mathématiques et le rôle des élèves "pas trop éloignées" des leurs[10]. Les chercheurs savaient que l'organisation de classe proposée (travaux de groupe, débat de validation) et le contenu de la séance (démarche de preuve) ne faisaient pas partie des habitudes de ces enseignants : ils l'ont fait intentionnellement afin d'observer le comportement

[7] Voir MARGOLINAS, C. (1993), op. cit. p 32-33.

[8] ARSAC, G., BALACHEFF, N., & MANTE, M.(1992), Teacher's role and reproductibility of didactical situations,*Educational studies in mathematics, vol 23, n°1*, 5-29.

[9] GRENIER, D. (1988), *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la sythogonale en sixième,* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble I.

[10] ARSAC, G., & MANTE, M. (1990), Le rôle du professeur - Aspects pratiques et théoriques, reproductibilité, in*Séminaires IMAG 1988-89*, 79-105, Grenoble: Université Joseph Fourier., p. 95.

des professeurs non pas dans leur enseignement habituel mais en réaction à une "perturbation". Les enseignants choisis n'avaient pas participé à l'élaboration de l'expérimentation : les scénarios leur ont été présentés, avec discussion, au cours de 3 entretiens (dont 1 avec vidéo pour illustrer le type de séance souhaitée).

La séance ne s'est pas passée comme les chercheurs l'avaient décrite dans le scénario initial.

Arsac, Balacheff & Mante repèrent plusieurs types d'obstacles à la transmission de scénarios pédagogiques entre chercheurs et enseignants.
- L'enseignant attend de la part des élèves un comportement spécifique, qui est, à ses yeux, le témoin de l'apprentissage qu'il recherche.
- Le fonctionnement scolaire impose des limites de temps. Pour l'enseignant, le savoir en jeu doit être su à un moment donné. L'enseignant peut induire fortement, voire forcer l'apparition des certains comportements.
- Des interventions, dont il n'a pas conscience, modifient le contrat de la classe.
- Il ne partage pas forcément les conceptions des chercheurs sur les savoirs en jeu.

Sur ce dernier point, Margolinas (1993) souligne que chercheurs et enseignants n'ont pas les mêmes buts. Le chercheur souhaite accroître les connaissances sur l'apprentissage en général, l'enseignant se sent responsable de certains apprentissages chez ses élèves.

> La déontologie est souvent vue du coté de l'élève, comme s'il était le seul sujet du système didactique. De ce point de vue, on peut admettre "l'hypothèse zéro" [11] comme hypothèse déontologiquement acceptable.
> Mais la déontologie relative au maître nous impose des restrictions beaucoup plus importantes. L'enseignant, quelle que soit la modalité expérimentale envisagée (...) reste responsable du point de vue du savoir. Il ne peut donc donner sa caution qu'à un enseignement qu'il *estime* être au moins aussi bon que ce qu'il aurait fait "hors expérience". D'autre part, l'expérience coûte cher à l'enseignant, en terme de temps personnel, de temps didactique, de contrat didactique ; il est donc clair qu'il ne s'y engagera (pour une durée significative) que s'il pense qu'elle peut apporter quelque choses à ses élèves, et pas seulement ... à la science !
>
> Il *estime*, il *pense*, c'est-à-dire que *ses propres critères* vont nécessairement interagir avec les critères issus des questions de recherche. En fait, ils vont être prépondérants du fait de sa responsabilité immédiate. D'autre part l'enseignement [12] évalue, comme après n'importe quelle leçon, si "ça a bien marché", les critères d'innovation et ceux de la recherche sont donc mêlés.[13]

Le décalage existe donc [14]. On ne peut faire l'économie de l'analyse du rôle de l'enseignant dans la conduite des séances.

---

11 C'est-à-dire que l'élève n'ait pas à souffrir de l'expérimentation du point de vue de l'apprentissage - on pourrait aussi dire, qu'il ait au moins autant l'occasion d'apprendre qu'en l'absence d''expérimentation. Note p. 233, op. cit.

12 Faut-il lire *l'enseignant* ?

13 Op. cit, p. 233-234. Mentions soulignées par l'auteur.

14 On peut se demander d'ailleurs sur quels indices Arsac & Mante s'étaient basés pour estimer que les enseignants avaient des conceptions sur l'enseignement, l'apprentissage et les mathématiques "pas trop éloignées de celles des chercheurs", puisqu'ils notaient par ailleurs le caractère inhabituel de ces séances (organisation et contenu).

Artigue souligne que la reproductibilité interne est encore plus difficile à atteindre quand les chercheurs s'adressent à des non-didacticiens : phénomène à l'origine d'autres recherches.

> Quand nous décrivons des séquences d'enseignement en vue de leur transmission hors recherche, le fait de nous adresser à un public potentiel de non-didacticiens nous incite à gommer le didactique de la description. Selon un phénomène classique, de peur de ne pas être compris, nous quittons le registre de la pensée scientifique pour celui de la pensée naturelle. Ce faisant, presque inévitablement, nous sacrifions les caractéristiques internes des situations didactiques au profit de caractéristiques externes, plus aisées à décrire, faisant par là même obstacle à la reproduction interne.
>
> Ce sont justement les difficultés rencontrées dans la transmission didactique, pour les besoins de la recherche et plus encore à l'issue de celle-ci dans la transmission d'ingénieries didactiques, produits de développement, qui ont attiré l'attention des chercheurs sur un autre problème : celui des représentations que les enseignants se font des mathématiques, de leur apprentissage et de leur enseignement et de l'influence de ces représentations sur les choix qu'ils effectuent et les décisions qu'ils prennent dans leur enseignement.

Reproductibilité didactique, transmission d'ingénieries, représentation des enseignants : il y a glissement progressif vers l'étude du pôle enseignant du "triangle didactique", en didactique des mathématiques et dans des recherches d'autres horizons.

1.4- Vers une modélisation de l'enseignant

Pour A. Robert et J. Robinet, citées par M. Artigue, une certaine compatibilité de conception entre les chercheurs à l'origine d'une ingénierie et les enseignants qui vont l'expérimenter ou chercher à l'utiliser est nécessaire au bon fonctionnement de la transmission didactique. Elles ont pris appui sur les représentations sociales pour introduire la notion de représentation métacognitive, qui désigne : "les conceptions des enseignants sur les mathématiques, sur la manière de les enseigner et de les apprendre, avec les conséquences sur leurs pratiques professionnelles".

L'analyse de discours obtenus par questionnaires ou interviews les a conduites à élaborer une grille d'analyse qui leur a permis de mettre en valeur des oppositions. Par exemple, les élèves apprennent en écoutant, par imitation, en faisant des exercices d'application après le cours qui leur a permis de comprendre / les élèves apprennent par "l'action", la résolution de problème).

C'est aussi en terme d'oppositions que Perrin (1992) [15] explique le décalage entre chercheurs et praticiens : les travaux d'ingénierie didactique adoptent généralement un point de vue épistémologique qui accorde une grande importance à la résolution de problèmes, aussi bien dans la construction du savoir que comme critère du savoir. Or

> (..) d'une part, cette position n'est pas toujours conforme aux conceptions sur l'enseignement et l'apprentissage des professeurs qui utilisent les résultats des recherches, ce qui pose des problèmes au niveau de la transmission des travaux d'ingénierie didactique, d'autre part, (...) les élèves ne sont pas toujours prêts non plus à engager leur responsabilité dans une résolution de problème. Il nous semble

15 PERRIN-GLORIAN, M.J. (1992), *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-sixième,* Thèse de doctorat d'Etat, Université Paris VII, Paris.

d'abord que cela demande pour les travaux d'ingénierie didactique, s'ils sont diffusés au-delà de la communauté des chercheurs, d'être capables de préciser les conditions de fonctionnement des connaissances dans les situations, du côté du maître comme du côté des élèves. [16]

Cet écart ne nous paraît pas fortuit : dans bon nombre de cas, le paradigme de la "bonne leçon" n'est pas le même pour chercheurs et enseignants. Perrin en donne de nombreux illustrations dans sa thèse. Par exemple, elle a retenu dans des expressions orales d'enseignants de collège en formation continue les thèmes dominants suivants [17] :

> - On ne peut pas demander aux élèves de faire quelque chose qu'on ne leur a pas enseigné.(...)
>
> - L'enseignement doit progresser de façon continue. (...) On ne peut (...) ajouter qu'un peu de difficultés à la fois. Si les élèves ont des difficultés, il faut trouver des maillons intermédiaires, faire de plus petits pas.
>
> - On enseigne les mathématiques sous une forme définitive, ce qui a été enseigné avant devrait être connu des élèves, il faut éventuellement le revoir, mais on ne peut le remettre en question. (...)
>
> - Pour que les élèves apprennent, il est nécessaire qu'ils écoutent et qu'ils participent en classe, ils doivent aussi s'entraîner. S'ils écoutent bien, tout en restant actifs, et si le professeur explique bien, ils vont apprendre. (...)
>
> - On ne peut laisser un travail des élèves non corrigé, on ne peut prendre le risque de laisser des erreurs dans la tête des élèves, donc il faut pouvoir contrôler tout ce qu'ils font, et traquer les erreurs éventuelles, et même si possible les prévenir. Ce principe est aussi incompatible avec la notion de problème de recherche au sens où en parle R. Douady parce que la diversité des méthodes devient trop grande, surtout si on donne à des groupes différents des valeurs différentes des paramètres de la situation. (...) L'idée que chaque groupe pourrait ne rendre compte que d'une partie de son travail (...) et qu'il se pourrait donc qu'il reste à [l']insu [des professeurs] des procédures erronées non corrigées - même si la correction avait lieu dans un autre cas - [leur est] diffficilement acceptable. Ceci explique aussi en partie le poids de l'évaluation sur les pratiques des professeurs. C'est le moyen de savoir si leur message passe. La correction d'un exercice est une nouvelle occasion de délivrer le message.[18]

Il est donc nécessaire d'examiner de plus près la position relative des chercheurs et des enseignants. Mais dans quel cadre théorique ? La synthèse faite par Tochon (1992) nous permet d'y voir plus clair.

Tochon a étudié les cadres conceptuels des recherches sur les connaissances pratiques des enseignants [19]. Il note une grande hétérogénéité des recherches sur la connaissance et les savoirs enseignants. Il isole quelques domaines conceptuels ayant une influence déclarée, prégnante, sur une large majorité de travaux actuels. Citons-en quelques-uns.

---

[16] P. 399.

[17] Chapitre 6 de sa thèse, déjà citée.

[18] Op. cit., p. 356.

[19] TOCHON, F.V. (1992), A quoi pensent les chercheurs quand ils pensent aux enseignants ?, *Revue française de pédagogie n° 99*, 89-113.

Dans la modélisation par système de traitement de l'information, les actions routinières de l'enseignant trouvent facilement leur place, ce qui n'est pas le cas pour la gestion par l'enseignant d'événements atypiques.

> Chaque enseignant sait qu'il doit prendre en considération de nombreux éléments simultanés dans chacun de ses actes. Il est capable de remplir à la fois des séquences de buts qui se suivent et d'analyser les conditions multiples, simultanées, des diverses réalisations possibles de chacun de ces buts. Sa hiérarchisation des buts est mobile, la priorité en est variable selon les réactions des élèves ; de plus, elle inclut des règles d'exception permettant de comprendre des événements atypiques.[20]

Dans le courant phénoménologique, le cadre conceptuel des histoires personnelles de l'expérience repose sur l'idée que les humains se comprennent en se racontant des histoires sur eux-mêmes et sur les autres. La recherche narrative invite au feedback, elle est souvent une "histoire à deux" entre chercheur et enseignant, une collaboration de recherche en pensée, sur le vécu. Tochon note que l'histoire de l'expérience n'est pas tout à fait l'expérience : elle est l'histoire qu'on s'en fait.

Les courants de la science du concret, de la réflexion-en-action reposent sur le fait que les connaissances qui permettent l'action ne sont pas toujours transposables en mots.

> Les champions de tennis, par exemple, peuvent retourner une balle dans une succession rapide de mouvements, intuitivement calculés selon la visée particulière d'un coin de terrain, mais ne peuvent souvent pas décrire la connaissance du contrôle de la balle sous-jacent à leur performance. De même les enseignants, quand il s'agit d'expliquer leurs réactions lors d'interactions en classe. L'absence d'explicitation des stratégies chez les professionnels s'explique par la nature tacite de leur expérience. Les actions intuitives et spontanées de la vie quotidienne mettent en jeu des compétences difficiles à articuler logiquement. Ce qui est su ne peut être toujours dit. La description du vécu est la plupart du temps impossible ou inappropriée, inadéquate. La connaissance implicite aux modèles de l'action serait un sentiment du terrain : la connaissance serait dans l'action.
>
> (..) En réfléchissant-en-action, le praticien deviendrait un chercheur dans son contexte pratique. Il ne dépendrait pas des catégories d'une technique ou d'une théorie établie, mais il construirait une théorie du cas unique, une nouvelle théorie pour chaque cas. Son enquête ne se limiterait pas à une délibération sur les moyens, soumise à un accord préalable sur les fins, comme dans le modèle par objectifs ; il ne scinderait pas les fins et les moyens mais les définirait interactivement, tout en cadrant la situation problématique. Sa pensée ne serait pas séparée de l'action : il ne ratiocinerait pas sur les décisions les plus appropriées à convertir ensuite en action : son expérimentation serait une forme de l'action, son implantation sur le terrain serait construite dans l'enquête même. La mise en oeuvre se ferait en recherche.
>
> (...) La résolution de problèmes professionnels jaillit d'un répertoire de connaissances pratiques qui engendrerait des exemplaires (cas, anecdotes) ou des métaphores génératrices de compréhension des nouveaux événements. Une fois les nouveaux événements recadrés, le/la professionnel/le s'engagerait dans la conversation réfléchie des situations au moyen d'une action à la fois mentale et physique. Le "discours récursif" ou dialogue en retour provoqué par l'action fonderait la recherche et la réponse ultérieures.

---

20 Art. cit., p. 95.

Pour Tochon, la multiplicité des modèles théoriques (ceux que nous venons de citer et d'autres) rend compte de la complexité de ce que vivent les enseignants. Meirieu (1995) va plus loin quand il insiste sur le caractère singulier de l'acte enseignant, et l'impossibilité qu'une théorie puisse, à elle seule, édicter ce que serait le geste professionnel optimum [21]. Tochon conclut sa synthèse en déclarant que la place de la théorie a changé par rapport à la pratique au cours de la dernière décennie [22] :

> Alors que, pendant longtemps, on estimait que le but des formations était de transmettre la théorie et que le but des enseignants était de l'appliquer, on conçoit maintenant que la théorie est un langage possible, en quête de cohérence, au service de la description et de l'explication des pratiques. Le praticien possède un ensemble de modèles. Leur description, leur explication approfondit la compréhension du terrain, elle devrait permettre d'améliorer l'apprentissage et l'enseignement "de l'intérieur". (...)
> Quand les chercheurs pensent aux enseignants, leur tête est pleine de préconceptions. Les enseignants et enseignantes ayant lu cette synthèse saisiront pourquoi les chercheurs sont parfois difficiles à comprendre : il faut les laisser parler de ce qui les préoccupe et tenir compte de leurs représentations. Si ces conditions sont remplies, alors les enseignants apprendront un maximum des chercheurs et leur ouvriront les yeux sur de nouvelles inconnues.

Nous partageons avec Tochon l'idée de la complexité du monde enseignant. Comme lui, nous accordons de l'importance à la prise en compte du point de vue des praticiens, de ce qu'ils font et ce qu'ils disent. En revanche, nous ne croyons pas qu'il soit facile, pour des chercheurs et des enseignants, de dialoguer entre eux, en professionnels qui auraient à découvrir mutuellement leurs "préconceptions". Les deux mondes, celui de la recherche et celui de l'enseignement, semblent plutôt séparés.

1.5- De la recherche à la pratique : exemples de modélisation

Nous citerons deux modélisations récentes sur le passage de la recherche à la pratique, parce qu'elles opposent les deux mondes de la recherche et de l'enseignement.

La première est celle faite en sociologie par Huberman et Gather Thurler (1991, 1992)[23]. Huberman et Gather Thurler se placent dans le cadre de la théorie de la communication, plus précisément du domaine dit "de dissémination et d'utilisation des connaissances", champ d'études développé dans la période des années 1930-1950. La dissémination est définie par le schéma d'une double relation entre un diffuseur situé dans le monde de la production de connaissances et un utilisateur situé dans le monde de l'utilisation des connaissances : du diffuseur à l'utilisateur se fait un transfert de connaissances ; de l'utilisateur au diffuseur se fait la communication des besoins. Nous discuterons plus loin la dénomination et le schéma.

---

21 MEIRIEU, P. (1995), *La pédagogie entre le dire et le faire*, Paris: ESF, p. 246-253.

22 Même si de nombreux enseignants nous ont fait part de leur impression que la recherche leur recommandait des pratiques...

23 HUBERMAN, M. & GATHER THURLER, M. (1991), *De la recherche à la pratique - Eléments de base, Mode d'emploi*, 2 tomes, Berne: Peter Lang.
HUBERMAN, M. (1992), De la recherche à la pratique : comment atteindre des retombées "fortes" ?, *Revue Française de Pédagogie, n° 98*, 69-82.

Leur modèle théorique intègre a priori plusieurs fonctionnements possibles des chercheurs par rapport aux praticiens : initiative complète laissée aux praticiens, recherches appliquées pilotées par les chercheurs, recherches théoriques provoquées par les praticiens.

Huberman et Gather Thurler valident leur modèle à partir de la recherche suisse EVA (Éducation et vie active). Il s'agit d'un programme de recherche appliquée pour l'ensemble de la Suisse, extrêmement important au plan budgétaire (environ un milliard de FF) qui attribuait 10 % du budget aux actions de dissémination des résultats de recherche, notamment à l'extérieur de la communauté scientifique. La question principale que se pose Huberman est la suivante :

> Dans quelles conditions les tentatives de dissémination des résultats des recherches, telles que celles conduites dans le Programme EVA, peuvent-elles mener à une "utilisation" effective, notamment de la part de non-chercheurs ?

Au plan méthodologique, leur équipe a retenu onze des principaux projets du programme EVA, très divers dans leurs thèmes : les maîtres d'apprentissage, la personnalité ou les styles d'apprentissage des apprentis, les caractéristiques des entreprises et des institutions de formation. Ils ont cherché à suivre les "traces" laissées par le projet auprès de 23 publics-cibles, par des entretiens, des observations, et l'analyse de documents pertinents. L'analyse est à la fois qualitative et statistique.

Ils ont classé les efforts de dissémination en plusieurs catégories :
- les projets "mainstream", recherche ---> développement ---> diffusion, dans lequel l'effort de dissémination est limité à une diffusion de résultats sous forme de rapports ciblés ou de cours donnés à la demande, au terme de l'analyse des données ; ses effets sont moyens ou faibles,
- les projets "good-will", où l'effort des chercheurs est plus important que le budget accordé, les résultats étant souvent meilleurs que les précédents,
- les projets "semi-professionnels", dus à des équipes de chercheurs relativement rompues aux techniques de dissémination, avec effets moyens ou forts.

La valeur scientifique de l'étude, telle qu'elle est jugée par les experts dans le domaine, est moins déterminante que la "valeur" perçue par l'utilisateur, valeur qui dépend de la compétence de "dissémination" des chercheurs.

Huberman distingue les "effets conceptuels" et les effets "instrumentaux".

Les effets "conceptuels" ont trait aux conséquences sur les connaissances, les réflexions, les perspectives, les idées... des utilisateurs. Huberman a pris comme indice les déclarations des utilisateurs lors des entretiens, où ils étaient invités à résumer les conclusions principales de la recherche et la signification de celles-ci à leur niveau, en les recoupant avec d'autres informations obtenues localement. Par exemple, l'enquête proposait aux utilisateurs des regroupements de réponses du genre suivant :

> Cette recherche :
> - m'a aidé à mieux comprendre le champ traité ;
> - m'a rendu conscient de choses que je ne connaissais pas ;
> - m'a fait mieux comprendre ma propre situation de travail ;
> - m'a donné de nouvelles idées ;

- m'a fait regarder les choses autrement, avec une autre perspective ;
- m'a rendu conscient de choses à ne pas (ne plus) faire ;
- a contribué à changer mes idées sur l'avenir.

Huberman constitue une échelle continue allant de "aucun effet conceptuel" à "effet fort : compréhension intégrée de la recherche EVA". La catégorie la plus fréquente est celle des "effets modérés : compréhension approfondie du champ", effets plus élevés que ceux observés dans d'autres études empiriques, qu'il attribue à la composante "dissémination" du programme EVA. Il ne précise pas de quels concepts il s'agit.

Les effets "instrumentaux" portent sur les conduites, les activités, les décisions "qui se produisent dans le domaine de l'action concrète, quotidienne de l'individu ou de l'institution concernés". Ils ont été mesurés avec une méthodologie semblable, entretiens recoupés par des observations de terrain. Pour un tiers des recherches, les effets instrumentaux ont été inexistants, la dissémination associée a été de type "arrosage" non ciblé, sans suivi. Un quart des utilisateurs déclare que les effets ont atteint des aspects fondamentaux de leur pratique quotidienne. Certains des effets portent sur l'institution elle-même : prise de décision, choix de politique. En ce qui concerne l'attitude des utilisateurs face à la recherche, Huberman note une évolution plutôt positive vis-à-vis des chercheurs, "surtout chez les répondants et les institutions où l'expérience préalable de la recherche scientifique était inexistante". Il parle "d'apprivoisement mutuel", qui ne se produit pas quand la dissémination est particulièrement réduite.

Dans l'illustration du modèle qu'il a présenté, Huberman ne fait pas état de cheminements qui partiraient des besoins des utilisateurs et provoqueraient des démarrages de recherches. Dans les exemples qu'il prend, la décision politique est prise à l'échelle du pays entier (la Suisse), une part des moyens financiers accordés aux recherches est destinée à la diffusion des recherches chez les utilisateurs-cibles. Il n'a pas pris d'exemple où des usagers volontaires, en l'absence de soutien institutionnel, chercheraient à s'approprier des résultats de recherche disponibles au niveau universitaire.

Le "mode d'emploi", qu'Huberman a rédigé avec Gather Thurler en bilan de cette étude, est conçu pour "orienter la politique et la pratique de la recherche appliquée" [24]. Il propose "les bases essentielles de toute entreprise de diffusion et d'application des savoirs *scientifiques* ou *spécialisés* ". Pour les auteurs, une recherche qui souhaite être diffusée doit intégrer le processus de communication aux spécialistes et non-spécialistes. Ils préconisent que l'équipe de recherche prenne contact avec des membres-clés des publics-cibles principaux avant même la saisie des données liées à la recherche : le but est d'informer les futurs utilisateurs de l'existence et de la portée de l'étude, d'identifier les points de convergence entre l'objet de l'étude et les priorités, les besoins, les problèmes de leurs milieux respectifs, de clarifier l'enjeu local de cette recherche. Les auteurs supposent un accord au moins partiel sur les buts entre chercheurs et utilisateurs, puisqu'ils écrivent :

> Contrôler l'échantillonnage, le plan d'expérience et le cadre d'analyse pour s'assurer :
> - de la généralisation possible des résultats aux publics-cibles principaux,

24 Mention de la page de couverture.

- qu'ils répondent aux besoins prioritaires des publics-cibles,
- que l'emploi de données n'exigera pas trop de transformations ultérieures pour être comprises par des non-chercheurs.

Les auteurs considèrent le rapport entre le monde de la recherche appliquée et celui de la pratique comme une affaire de stratégie, sous la responsabilité des chercheurs. C'est au cours de l'étude que les utilisateurs "s'éduquent", à travers les produits intermédiaires, les rencontres, formelles ou informelles, entre chercheurs et praticiens.

Ce mode d'emploi, qui va de la recherche à la pratique et non l'inverse, concerne les savoirs "scientifiques" ou "spécialisés" qui peuvent devenir des outils pour l'action chez les utilisateurs. Il nous semble reposer sur deux hypothèses :
- il revient aux chercheurs d'assurer la diffusion des connaissances de leur propre secteur,
- cette diffusion est possible si elle fait partie du projet de recherche lui-même et a des retombées prévisibles sur les problèmes que rencontrent les utilisateurs.

Le modèle proposé par Huberman et Gather Thurler nous pose question à plus d'un titre.

Ce qui est appelé "dissémination" est présenté dans un schéma circulaire, qui va de la recherche à la pratique ou de la pratique à la recherche : or Huberman et Gather Thurler ne donnent aucun exemple de dissémination dont le point de départ serait l'utilisateur. Quelle est la différence alors entre "dissémination" et "diffusion de recherche" ou "vulgarisation scientifique" ? Dans les illustrations qu'ils donnent, la décision de diffusion est confiée aux chercheurs par le pouvoir politique (recherche EVA) ou par les chercheurs eux-mêmes (brochure "Mode d'emploi") : l'influence des utilisateurs sur le processus est postérieure à cette décision.

Huberman et Gather Thurler parlent de recherches appliquées. Dans les cas favorables où des recherches ont été bien diffusées, les chercheurs concernés ont trouvé les moyens de faire comprendre les concepts en jeu. Huberman et Gather Thurler ne précisent pas de quels "savoirs scientifiques" ou "spécialisés" il s'est agi. Tous les concepts seraient-ils également accessibles dès lors qu'ils relèvent de recherches appliquées ? Comment les chercheurs sont-ils sûrs qu'un produit de la recherche sera un bon outil pour les utilisateurs ?

La modélisation présentée est cependant particulièrement intéressante pour les catégories de diffusion qu'elle a permis d'élucider et la méthodologie de réductions de données par croisement qu'elle illustre.

Nous décrivons maintenant un autre exemple de modélisation réalisé par Portugais (1995) [25], qui s'inspire à la fois des travaux de sociologie d'Huberman et de la didactique des mathématiques.

Portugais a élaboré une ingénierie didactique réalisée avec quinze enseignants d'école primaire en formation initiale, dans le cadre d'un cours optionnel de didactique des mathématiques au début de leur troisième année de formation. Le thème de formation était, à propos de l'enseignement de la technique à la main de la division euclidienne, le repérage de l'erreur chez l'élève et son traitement.

[25] PORTUGAIS, J. (1995), Didactique des mathématiques et formation des enseignants, Berne: Peter Lang.

Pour ce faire, Portugais distingue trois types de savoir :
- le savoir mathématique S1, qui correspond aux opérations arithmétiques avec leurs algorithmes respectifs [26],
- le savoir didactique S2, qui correspond, en particulier, à l'interprétation des erreurs que font les élèves dans l'algorithme de la division,
- le savoir d'expérience S3 sur les erreurs des élèves, acquis au cours des situations d'enseignement.

Il utilise une double cadre théorique :
- il utilise la didactique des mathématiques comme métaphore, pour bâtir une ingénierie de formation : il plonge des étudiants dans une situation de "résolution de problème", il relève des effets de "contrat de formation" (analogue au contrat didactique),
- il utilise des méthodes croisées issues de la sociologie pour réduire les données recueillies à partir de sources différentes : protocoles de séances d'enseignement assurées par les débutants, entretiens avec eux, cahiers de bord du débutant (préparations de classes et analyse faite par le débutant des séances qu'il a conduites).

Il interprète ses résultats en termes de dédoublement du "triangle didactique". Un premier "triangle didactique" concerne le milieu didactique ou système didactique (MD ou SD) où sont situés les élèves, le savoir des élèves S1, le débutant agissant comme enseignant. Un deuxième "triangle didactique" concerne le milieu de formation ou système de formation (MF ou SF) où sont situés le débutant en formation (le "formé"), le formateur et le savoir didactique S2. Où situer le savoir S3 ? Portugais le décrit comme un savoir privé du débutant, qui résulte de la situation de résolution de problème dans laquelle le formateur l'a placé en lui confiant une leçon à faire.

> S3 rend (...) compte de l'aspect professionnel de l'activité enseignante. En ce sens, S3 diffère profondément de nature avec le "savoir savant" de la mathématique (S1) ou de la didactique des mathématiques (S2). Nous pourrions dire que S3 se définit par les processus d'intervention du maître sur le rapport de l'élève au savoir mathématique.
>
> On aimerait défendre l'idée que S3 est expérientiel parce qu'il n'est pas constructible à l'avance par le formé, qu'il ne peut résulter que d'une interaction combinée entre la situation didactique et la situation de formation. Nous allons tenter de le montrer par l'absurde. Supposons possible que le formateur dévoile S3, il n'y a alors plus de *problème à résoudre* pour le formé et on se rend compte qu'il devient impossible de passer de MF à MD parce que le formateur aura institutionnalisé ce qui est en réalité une chose trop *privée* pour supporter un *devenir public*. En effet, *savoir comment intervenir sur l'erreur* est certes une chose délicate que la plupart des enseignants se refuseront à formuler spontanément, en supposant même qu'ils soient en mesure de le faire.
>
> On touche là aux aspects profondément *privés* du savoir enseignant : même s'il ne s'agit pas d'un savoir savant et que le savoir n'est pas codifié quelque part, nous soutenons qu'il s'agit pourtant bel et bien d'un savoir, mais d'un savoir d'expérience. Dans notre exemple où le formateur dévoile S3, il n'y a plus *d'enjeu didactique* dans SF. Ou plutôt si, il y a un enjeu, mais celui-ci est rapidement

26 Au lieu d'*algorithme*, nous préférerions dire *technique usuelle de calcul à la main*. Ces techniques ne sont pas les mêmes selon les cultures.

assimilé par le formé (et de bon droit dans ce cas) à la restitution de S3. Cette restitution de S3 correspond tout à fait à l'observance de règles et de prescriptions, au *conformisme obligé* du formé aux exigences du formateur, bref à un fonctionnement contractuellement aplati de la relation Fr/Fé [Formateur/Formé]. S3 n'a plus de sens "endogène" pour le formé, il n'est plus qu'une caricature de savoir, il consiste à s'entraîner à des pratiques sociales, à des gestes didactiques qui ont l'allure de comportements prédéfinis. C'est là précisément ce que nous voulions contourner dans l'ensemble de notre démarche.[27]

Pour Portugais, il y a autonomisation progressive du savoir d'expérience S3 par rapport au savoir didactique S2, au fur et à mesure que le savoir d'expérience S3 s'accroît (Portugais parle d'étapes $S3_1$, $S3_2$...., $S3_{i...}$).

(...) au début, $S3_i$ ressemble fort à une '"application" de S2 dans MD (montrer au formateur que l'on sait identifier les erreurs). C'est en ce sens que nous avons affirmé que "le formé cherche à éprouver les analyses préalables" (...). La filiation de S2 avec S3 est alors telle que le formé ne peut quasiment pas faire autrement au début que de prendre l'un pour l'autre, croyant pouvoir déduire de S2 les conduites nécessaires à son intervention (assimilation de S3 à S2).
Mais petit à petit, S2 devient moins prégnant dans le discours du formé au profit d'un discours plus centré sur l'effectivité de ses choix didactiques. (...) Les résultats indiquaient d'ailleurs que l'activité cognitive engagée par le formé lors des séquences 2 et 3 est de moins en moins centrée sur les aspects diagnostiques (donc s'éloigne de l'application directe de S2 dans SD) et de plus en plus sur les aspects stratégiques (donc tend à alimenter la constitution de S3). [28]

S3 relève, pour Portugais, de ce que Piaget appelle schème.

Il nous faudrait (...) mettre en évidence un aspect jusqu'ici négligé concernant ces organisations de conduites, à savoir que la mise en oeuvre de ces règles d'action tout autant que leurs majorations dans le cadre du dispositif témoignent de la construction de connaissances chez le formé à propos des erreurs des élèves. On pourrait alors envisager de considérer ces schèmes-diagnostics comme révélateurs de la construction de savoirs chez le formé ; savoirs qui prendraient racine dans l'interaction que le formé a avec la situation. Le fait que l'on retrouve des formes de repérage des erreurs qui soient essentiellement faites "en fonction du contrat" lors des premières séquences et que ces formes tendent à être progressivement remplacées par des activités plus cohérentes par rapports aux analyses préalables, est un bon indicateur que les pratiques sociales de départ (..) peuvent évoluer de façon autonome à travers la dynamique des confrontations a priori/a posteriori. Rappelons d'ailleurs que cette dynamique du dispositif a été mise en place expressément dans ce but.

Notre interprétation est qu'il ne s'agit pas de simples pratiques ou "dispositions" professionnelles mais qu'une conceptualisation progressive de l'erreur en contexte didactique s'est construite dans le cadre du dispositif de formation. C'est dans un sens piagétien que nous avons parlé de "prise de conscience". [29]

[27] Op. cit. p. 285.

[28] Op. cit. p. 287.

[29] Op. cit. p. 163 -164.

Nous retenons du travail de Portugais la mise en évidence de différents types de savoir, savoirs pratiques/théoriques, savoirs privés/publics, distinctions que l'on retrouve dans bon nombre de publications aujourd'hui [30]. La recherche de régularités dans le comportement des débutants en formation nous paraît rentrer dans les perspectives ouvertes par la didactique professionnelle.

1.6- La didactique professionnelle

Comment un professionnel acquiert les gestes de son métier ? Comment améliorer ses pratiques ? Ce sont des questions que se pose la didactique professionnelle, champ de recherche qui s'est beaucoup développé avec la formation des adultes : citons, entre autres, les travaux de Pailhous & Vergnaud (1989), Pastré (1992)[31] , Rogalski & Samurçay (1992, 1994).

Aujourd'hui, la majorité des formations d'adultes tentent de prendre pour point de départ ce que ces adultes savent. Mais ces savoirs ne sont pas tous explicites.

> Le décalage entre les connaissances explicites ou explicitables et les connaissances implicites dans l'action opératoire est considérable, même chez l'adulte cultivé, l'ingénieur, le médecin, le diplomate ou l'enseignant [32].

C'est dans l'acte professionnel que l'on peut repérer des régularités, des schèmes, qui révèlent l'état de savoir des acteurs. Éclairons la notion de schème en reprenant ce qu'en dit Vergnaud (1994).

> On peut penser le réel comme un ensemble de situations dans lesquelles le sujet est engagé de manière active et affective. Le réel est alors vécu sur le mode dramatique, avec les deux caractéristiques du dramatique que sont l'action et l'émotion. (...)
>
> En affinant progressivement la définition d'un schème, je dirai d'abord que c'est une totalité dynamique fonctionnelle, c'est-à-dire quelque chose qui fonctionne comme une unité ; en second lieu que c'est une organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données (l'algorithme est un cas particulier de schème) ; et en troisième lieu qu'un schème est composé de quatre catégories d'éléments :
> - des buts, intentions et anticipations,
> - des règles d'action,
> - des invariants opératoires,
> - des possibilités d'inférence en situation. [33]

Vergnaud insiste sur le fait que sans conceptualisation implicite du réel, il n'y a ni intention ni règles.

---

30 Citons en particulier ARSAC, G., GRÉA, J., GRENIER, D., & TIBERGHEIN, A (1995), *Différents types de savoirs et leur articulation,* Grenoble: La pensée sauvage.

31 PASTRÉ, P. (1992), Requalification des ouvriers spécialisés et didactique professionnelle, *Éducation Permanente n°111, Approches didactiques en formation d'adultes,* 33-54 .

32 VERGNAUD, G. (1992) *Éducation permanente n° 111, Approches didactiques en formation d'adultes,* Qu'est-ce que la didactique ? En quoi peut-elle intéresser la formation des adultes peu qualifiés ?,19- 32 , p. 28.

33 VERGNAUD, G. (1994), Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel, in M. ARTIGUE, M., R. GRAS, R., C. LABORDE, C. & P. TAVIGNOT., *Vingt ans de didactique en France, Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud,* (pp. 177-191), Grenoble: La pensée sauvage, p. 180.

(...) c'est un vrai travail du psychologue, du didacticien, de l'enseignant que de dénicher les conceptualisations sous-jacentes aux conduites des élèves, aux procédures qu'ils utilisent, à leurs erreurs. Je distingue deux grandes catégories d'invariants opératoires, les concepts-en-acte et les théorèmes-en-acte en entendant par "concepts-en-acte" les catégories qui permettent de prélever l'information pertinente en situation, et par "théorèmes-en-acte" les propositions tenues pour vraies par le sujet et qui lui permettent de traiter cette information. Pertinence et vérité sont deux choses distinctes. Un concept n'est ni vrai ni faux, il est seulement pertinent ou non pertinent pour catégoriser l'information utile ; pour générer des buts, des règles et des actions en situation, il faut des propositions tenues pour vraies et pouvant se prêter à des calculs d'inférences. La conceptualisation consiste ainsi de manière indissociable en concepts et théorèmes, dont une faible partie est explicitable par le sujet.[34]

La didactique professionnelle s'intéresse aux situations-problèmes auxquelles sont confrontés les professionnels d'un secteur donné, repère les compétences des acteurs, la nature des tâches à effectuer, avant de proposer des "mises en scène didactique" de formation [35]. Les travaux de Rogalski & Samurçay sur la gestion des environnements dynamiques nous paraissent particulièrement intéressants en vue d'une transposition dans le monde enseignant.

Rogalski & Samurçay définissent les situations de gestion d'environnement dynamique en s'appuyant sur deux situations particulières : la conduite de hauts fourneaux et la lutte de feux de forêt.

Le but ultime de l'activité de gestion est de définir et de mettre en oeuvre un dispositif d'intervention (ensemble de manoeuvres) permettant d'atteindre un "état-cible" stable et qui limite au maximum les conséquences négatives possibles d'un événement souvent irréversible. Le dispositif doit spécifier un ensemble d'actions coordonnées (quoi faire) répondant à des sous-buts (pourquoi), définies, dans l'espace et le temps (où et quand), utilisant un ensemble de ressources matérielles et humaines (avec quoi et avec qui).

Comme pour tous les environnements dynamiques, l'activité de contrôle exige des opérateurs la coordination de deux modèles : celui du fonctionnement du processus et celui des effets de leurs actions propres. Dans les deux cas, l'ensemble de la tâche de contrôle peut être décrite comme une boucle : prise d'information, diagnostic/pronostic, planification de l'action et éventuellement les moyens de l'action, décision, exécution et contrôle.[36]

Comparant les deux situations, Rogalski & Samurçay dégagent les caractéristiques des tâches de gestion de sinistre.

- la conduite de HF [haut fourneau] porte sur un processus artificiel fortement automatisé, où l'activité des opérateurs est médiatisée par des systèmes contrôle-commande ; la gestion de sinistre porte sur un environnement dynamique

34 Op. cit. p. 181.

35 Voir par exemple PASTRÉ, P., article cité.

36 ROGASLKI, J., & SAMURÇAY, R. (1992), Formation aux activités de gestion d'environnements dynamiques : concepts et méthodes, *Éducation Permanente n°111, Approches didactiques en formation d'adultes,* 227-242, p. 229.

"ouvert" : il s'agit de processus naturels sans prise d'information ni régulation ni commande automatiques, où l'activité est médiatisée par des acteurs humains ; le nombre de paramètres est beaucoup plus important pour le haut fourneau, alors que le nombre d'acteurs est beaucoup plus important dans la gestion de crise (plusieurs centaines sur un feu important),

- dans les deux cas, les processus sont continus (les variables sont fonction du temps), à longs délais de réponse (les effets des actions ne sont pas toujours immédiats), exigeant des activités d'inférence, d'anticipation et de planification,

- dans les deux cas, les variables à contrôler et celles qui renseignent sur l'évolution de la situation ne sont pas directes ; elles exigent le traitement de chaînes causales relativement longues (par exemple, dans la conduite de HF, on ne peut améliorer la qualité des réductions en agissant directement sur la variable qui permet de l'évaluer, il faut agir sur un autre paramètre qui, lui-même, a un effet direct ou indirect sur le phénomène).[37]

Rogalski & Samurçay ont étudié les exigences cognitives de la tâche de gestion de sinistre. Elles ont repéré des activités cognitives communes et des savoirs communs : par exemple, des anticipations, des raisonnements sur des données approchées ou incertaines, des raisonnements sous hypothèse, des décompositions de buts, des coordinations spatio-temporelles d'actions "élémentaires". Les prises d'information, comme la mise en oeuvre des décisions, sont médiatisées par d'autres acteurs, selon des canaux de communication variés. Cette médiatisation joue également dans la transmission des ordres d'exécution. Les représentations hétérogènes des acteurs sur l'organisation opérationnelle, les fonctions et les structures des systèmes intervenant à différents niveaux, sur leur évolution au cours d'une intervention de type donné, peuvent gêner la coopération opérationnelle. L'amélioration de la gestion d'un type de sinistre donné suppose l'élucidation des processus de régulation au sein des groupes habitués à travailler ensemble. C'est grâce à cette élucidation que peu à peu émerge un corps de savoir de référence, issu d'un ensemble de "savoirs en acte" manifestés dans des pratiques. Ce processus transforme ainsi l'expérience des "anciens" en connaissance pour les "nouveaux".[38]

Rogalski & Samurçay distinguent la pertinence du savoir de référence et sa légitimité. Le savoir de référence doit être pertinent par rapport à la tâche concernée et pas seulement légitime par rapport à l'institution.

> L'enseignement général, non professionnel, a besoin d'un "savoir savant" qui lui assure une légitimité épistémologique et culturelle (Chevallard, 1985). Dans le cas d'une formation professionnelle comme celle que nous étudions il faut distinguer légitimité et pertinence. Certes le fait de faire apprendre, et le contenu, doivent être "justifiés" par un pouvoir de légitimation mais ce contrôle social est médiatisé et essentiellement exercé par le jugement des "pairs" - d'une manière qui tient à la fois de ce qu'on peut observer dans la recherche et de ce qu'on rassemble sous le terme "culture d'entreprise". Mais cette formation doit aussi être pertinente par rapport aux objectifs fixés et aux tâches attendues : la légitimité se tient du côté de l'institution, la pertinence du côté de l'épistémologie et de l'action.

---

37 Op. cit. p. 230.

38 ROGASLKI, J., & SAMURÇAY, R., Modélisation d'un "savoir de référence" et transposition didactique dans la formation de professionnels de haut niveau, in G. ARSAC, Y. CHEVALLARD, J.L. MARTINAND, & A. TIBERGHEIN, *La transposition didactique à l'épreuve* (pp. 35-71), Grenoble: La pensée sauvage, p. 42-43.

> Il ne s'agit donc pas ici de fabriquer et de légitimer un savoir propre à être enseigné, par un processus de contre-transposition tel que défini par Chevallard (Chevallard, 1985) auquel on peut attribuer par exemple la constitution d'un objet "grand Cos" propre à une trigonométrie scolaire (niveau 3ème/2de), ou celle actuelle d'une "théorie" des "suites de références" dans l'initiation à l'analyse en 1ère Scientifique ou en Terminale C (orientation scientifique math-physique dans le système scolaire français). Il est en revanche nécessaire pour l'efficacité de l'action de construire un corps de savoir de référence, qui puisse s'exprimer avec ses concepts, ses méthodes, ses systèmes de représentation et son langage. Le produit de ce type de travail est double : du point de vue opératoire (pour l'activité professionnelle) ce qui est produit peut être qualifié de corps de doctrine (et peut comporter un double "label" de légitimité et de pertinence) ; du point de vue de l'enseignement, c'est le point de départ de la détermination d'unités enseignables, avec élaboration de documents pour la formation et spécification de situations didactiques.[39]

Rogalski & Samurçay ont effectivement identifié, dans le cadre de la gestion de sinistre, les concepts et problèmes. Elles soulignent l'imbrication des différents pôles d'analyse des tâches et les mettent en rapport avec les formations existantes sur la méthode de raisonnement tactique (MRT).

> L'analyse a priori des situations, tâches et activités attendues (...) ainsi que l'étude des situations de formation à la MRT (..) montrent l'inefficacité de considérer séparément d'une part l'organisation logique de la tâche d'élaboration de décision, et d'autre part les conditions structurelles et physiques de mise en oeuvre de la méthode avec son intégration dans la boucle de gestion de crise présentée [ci-dessus].

Les recherches en didactique professionnelle confirment la complexité de l'analyse des conduites des acteurs en milieu professionnel, elles fournissent aussi un cadre théorique qui s'est révélé productif dans un environnement professionnel particulièrement ouvert (gestion de sinistre).

Il nous paraît légitime de situer le problème que nous posons dans ce cadre. Nous suivons sur ce chemin d'autres didacticiens, comme Robert (1996) [40]. L'enseignement des décimaux dans les classes constitue à nos yeux un environnement dynamique "ouvert". Beaucoup d'observations déjà faites nous permettent d'élucider certains comportements courants à l'école primaire et au collège.

1.7- Primaire et secondaire : traces du passé

Les comportements et attitudes que nous pouvons observer aujourd'hui portent la trace des habitudes venues du passé.

Rappelons que l'enseignement primaire, au début du siècle, ne précédait pas l'enseignement secondaire. Les deux ordres d'enseignement constituaient autrefois deux filières séparées. Seul l'enseignement primaire était gratuit.

L'école primaire était organisée comme une école "complète" que fréquentaient les enfants des milieux de l'agriculture, de l'artisanat et du commerce. Les contenus d'enseignement étaient donc

[39] Op. cit. p. 45- 46.

[40] ROBERT, A. (1996), *Une approche de la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de lycée et collège en mathématiques : un essai de didactique professionnelle,* Cahier de DIDIREM n° 26, IREM de Paris VII, et aussi *La formation professionnelle initiale des enseignants de mathématiques : quel problème de didactique ?* (à paraître).

très proches des pratiques sociales qui leur servaient de référence et cela a perduré jusque dans les années 1950-1960, comme on peut le constater dans le sommaire d'un ouvrage très répandu à cette époque [41].

> L'activité commerciale
>
> Les moyens de paiement : monnaie, change.
> Les paiements au comptant.
> Les paiements à terme.
> Calcul vivant ; l'amortissement.
> La comptabilité.
> Calcul vivant ; frais d'achat et frais généraux, bénéfice net, bénéfice brut.
> Les placements ; la Caisse d'Épargne.
> Rentes sur l'État.(...)
> Obligations et actions. (...)
>
> La vie sociale
> La Sécurité sociale.
> Calcul vivant ; remboursements des frais médicaux. (...)
> Les allocations familiales. (...)
> Les assurances.
> Les impôts.
> Le budget communal. (...)
>
> Activités agricoles
> Surface des terrains, arpentage. (...)
> Échanges ; remembrements.
> Cultures et récoltes ; rendements. (...)
> Les engrais, traitements des cultures. (...)
> Les animaux de la ferme. (...)
> Le cubage des bois (...)
> Les comptes à la ferme : crédit agricole, prix de revient. (...)
> Dans l'industrie : pourcentages, rendements.
> Activités artisanales. (...)

L'enseignement secondaire recrutait dans des couches sociales plus aisées des jeunes destinés à poursuivre des études longues. Il y avait sélection à l'entrée en sixième [42]. Les jeunes y recevaient un enseignement de culture, sans préoccupation d'utilité immédiate. Isambert-Jamati (1966) [43], s'appuyant sur les discours de distribution des prix, a montré que l'enseignement secondaire était associé au travail intellectuel gratuit, aux "humanités", par opposition à l'idée de rendement. Les professeurs de l'enseignement secondaire représentaient eux-mêmes la culture qu'ils devaient transmettre à leurs élèves ; ils n'avaient pas besoin de formation pédagogique : connaissant la matière, ils étaient de facto capables de l'enseigner.

Tout le XXème siècle est marqué par le rapprochement progressif des deux institutions.

---

[41] VASSORT, L. & M. (1963), *Le nouveau calcul vivant, Classes de fin d'études, Certificat d'études primaires, 3520 exercices et problèmes*, Paris: Classiques Hachette.

[42] En 1950, 5 % d'une classe d'âge passe la baccalauréat.

[43] ISAMBERT-JAMATI, V. (1990), La rigidité d'une institution : structure scolaire et systèmes de valeurs, in*Les savoirs scolaires - Enjeux sociaux des contenus d'enseignement et de leurs réformes* (chap. 2), Paris: Éditions universitaires. (Edition originale, 1966, *Revue française de sociologie*).

En 1926, les programmes des classes élémentaires de lycée ("petits classes") ont été alignés sur ceux des classes élémentaires de la filière primaire. La suppression des classes élémentaires de lycée a été décrétée en 1945 mais n'a été réalisée qu'après la réforme de 1959.[44]

Il nous reste des traces visibles de l'opposition entre l'enseignement primaire et l'enseignement secondaire, par exemple les profils des enseignants : à la polyvalence des enseignants à l'école primaire, s'oppose la spécialisation des enseignants dans l'enseignement secondaire. Il se pourrait qu'il y ait d'autres traces de cette séparation dans l'enseignement des disciplines elles-mêmes. Pour les mathématiques d'aujourd'hui [45], des chercheurs ont émis à ce propos des avis divergents entre eux.

Perrin (1992), analysant des entretiens avec 4 instituteurs et 4 professeurs de collège, a relevé des différences entre les enseignants du primaire et du secondaire [46].

- La modélisation du réel, c'est-à-dire l'utilisation des mathématiques pour résoudre des problèmes concrets, apparaît surtout chez les instituteurs, les professeurs de collège la mentionnent parfois dans les autres disciplines. Les professeurs de collège insistent sur les aspects langagiers.
- Les exigences en matière de formulation sont absentes des discours des instituteurs, tandis que les professeurs de collège insistent sur le fait que les formulations ne doivent pas arriver prématurément.
- Là où les professeurs de collège parlent d'apprentissage du raisonnement, les instituteurs parlent plutôt de recherche de stratégie.
- Les situations de recherche sont présentes dans le discours des instituteurs, par opposition aux situations d'entraînement abondamment citées au collège.
- La pression des notes est plus forte au collège qu'à l'école primaire. Les professeurs de collège ont tendance à assimiler notes et apprentissage, alors que les instituteurs font plus confiance à l'évaluation informelle.

Perrin souligne toutefois la fragilité de ces déclarations de ces enseignants : d'une part peu de personnes ont été interrogées, d'autre part leurs dires ne sont pas forcément conformes à leurs pratiques. Des observations croisées sont nécessaires.

L'institut national de recherche pédagogique (INRP) a comparé les pratiques de 27 enseignants de CM2 et et 70 enseignants de sixième, en histoire & géographie, français, langues vivantes, mathématiques et arts plastiques [47]. La méthodologie repose sur des observations de classes, l'analyse portant sur la mise en scène du savoir, le rapport au savoir, le type de séquences, les épreuves de connaissances, des entretiens avec les élèves et leurs enseignants. Il ressort de la recherche qu'il y a en mathématiques beaucoup plus d'indicateurs de continuité que de rupture. Les ruptures portent sur le vocabulaire mathématique, sur l'organisation du temps scolaire. Les continuités portent sur le style pédagogique.

---

[44] PROST, A. (1981), *Histoire générale de l'enseignement et de l'éducation en France, L'école et la famille dans une société en mutation,* tome IV, Paris:France-Labat.

[45] Jusqu'en 1970, on ne parlait pas de "mathématiques", mais de "calcul".

[46] Voir thèse, déjà citée.

[47] Institut national de recherche pédagogique, Département "Didactiques des disciplines" Équipe de recherche "Articulation École /Collège" (1987),*Les enseignements en CM2 et en 6ème, Ruptures et continuités,* Paris: Institut national de recherche pédagogique, Collège. Rapports de recherches n° 11.

Globalement, (...), l'élève ne change pas de style d'enseignement, il est confronté au même modèle pédagogique dominant basé sur le questionnement, la succession rapide des activités où dominent l'identification et la reproduction et qui laisse peu de place à la construction et à l'analyse des erreurs. C'est par la reconnaissance de ce modèle dominant que l'élève de 6ème assure son adaptation, conforme son comportement.
La présence massive de ce modèle d'enseignement a eu pour conséquence des difficultés à cerner en mathématiques des contrats disciplinaires bien différenciés et à mettre en relation ces contrats avec les performances des élèves.[48]

Au cours d'un "forum de problèmes" consacré à la liaison école-collège en mathématiques au cours de l'école d'été de didactique des mathématiques 1995, les chercheurs présents ont également affirmé que la continuité était plus forte que la rupture, la rupture étant située, pour eux, entre la cinquième et la quatrième.

On peut se demander comment s'est fait le rapprochement entre primaire et secondaire en mathématiques et quelle symbiose s'est faite entre les visions primaire et secondaire au fil des années.

2- Discussion - Choix d'une méthodologie

Après ce tour d'horizon, nous pouvons préciser les angles d'attaque que nous avons choisis.

Par commodité pour la suite de l'exposé, nous appellerons *progressions de référence* la partie des ingénieries qui traite de la réalisation didactique, c'est-à-dire la succession de séquences, leur description et commentaires. Notre référence sera celle des ingénieries de Brousseau d'une part, Douady & Perrin d'autre part [49].

2.1- Reproductibilité ou appropriation ?

Nous savons que Brousseau et son équipe, Douady & Perrin ont reproduit la succession de séquences de leur ingénierie plusieurs années de suite. La reproductibilité de ces successions a donc été observée dans des conditions particulières : les chercheurs eux-mêmes et leur équipe étaient les mêmes d'une année sur l'autre, les élèves étaient différents mais au sein de mêmes écoles. La répétition ne semble pas avoir lassé les enseignants, les brochures que ces deux équipes ont rédigées ne mentionnent pas de phénomènes d'obsolescence. La partie de réalisation didactique de ces deux ingénieries parait "robuste".

A notre connaissance, il n'y a pas eu d'utilisation de l'une ou l'autre des progressions de référence par d'autres chercheurs que leurs concepteurs et leur équipe[50]. Il est vrai que ces progressions portent sur des durées très longues : pour un enseignant, les suivre suppose un engagement personnel sur toute la durée d'une année scolaire et entraîne la modification de plus du tiers des cours. Un enseignant peut estimer le risque trop élevé pour l'apprentissage de ses élèves (voir remarques de Margolinas). Par ailleurs, notre fréquentation du monde enseignant nous permet d'affirmer que, dans le cas où le type de public est stable et les programmes inchangés, les

[48] Op. cit. p. 237-328.

[49] BROUSSEAU, G., & BROUSSEAU, N. (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Bordeaux: IREM de Bordeaux.
DOUADY, R., & PERRIN, M.J. (1986), *Liaison école-collège : Nombres décimaux*, Paris: IREM de Paris VI.

[50] Est-ce envisageable que ce soit un travail de "chercheur débutant" ?

enseignants incorporent chaque année une faible proportion d'innovations à leurs cours. Nous en déduisons qu'il ne peut y avoir de reproduction intégrale des progressions de référence : la reproductibilité ne peut s'observer que sur des *extraits de ces progressions.* Cela ne supprime pas la pertinence des progressions de référence : elles constituent à nos yeux des sortes de "théorèmes d'existence", en attendant qu'une généralisation soit possible [51].

Si la reproduction en bloc des progressions de référence ne peut être faite, en revanche, des publications ont fait état de reprises "aménagées" sur certaines séquences d'entre elles. Par exemple, Perrin a adapté certaines séances de la progression initiale Douady & Perrin lors de sa recherche sur les élèves en difficulté[52]. Citons, également pour la même progression, l'agrandissement du puzzle par trois enseignants de collège (IREM de Paris VII, 1987)[53] et par une équipe de l'Institut national de recherche pédagogique [54], l'utilisation des fractions pour coder des aires par une institutrice maître formateur d'école élémentaire (Kuzniak, 1994) [55].

Dans le cas des enseignants de collège, nous disposons à la fois de la description de l'activité telle qu'elle figure dans la brochure diffusée à l'intention des enseignants[56] et des comptes rendus faits par les trois enseignants de collège. On observe des modifications de la situation initiale : place dans la progression, statut de l'activité (pour deux enseignants, réinvestissement et non recherche), support géométrique du puzzle. Les exploitations ultérieures de la séance sont, également, divergentes.

Dans le cas de l'institutrice maître formateur, Kuzniak a décrit les difficultés rencontrées pour comprendre puis exécuter la séquence extraite de la brochure, en dépit de l'aide qu'il lui avait apportée. La lecture du document est difficile : ni introduction ni présentation de l'activité. Pour le déroulement, les consignes sont en grand nombre, la situation est très riche et donc les moments de synthèse sont compliqués à gérer, ce qui écarte du fonctionnement ordinaire de la classe. Par ailleurs, la brochure ne décrit pas le rôle du maître. L'institutrice a apprécié l'activité mais ne souhaite pas la reprendre.

Nous pensons qu'il faut prendre acte de ces décalages, que ce ne sont pas des "bruits" (comme le disaient déjà Arsac et Mante). Parler de reproductibilité ne nous paraît pas adéquat pour décrire comment des enseignants ordinaires, étrangers à la sphère des chercheurs, s'emparent de scénarios pédagogiques. Nous préférons parler d'appropriation : comment les enseignants s'approprient des propositions émanant du monde de la recherche, les adaptent, en tirent parti, au risque qu'ils en fassent "tout et n'importe quoi" (aux yeux des chercheurs), à la manière de la bouteille de Coca-cola

---

[51] Nous avons développé un point de vue semblable dans BOLON, J. (1992), *ZDM 93/4,* Un théorème d'existence peut-il être généralisé ?, 144-145, Analyse de l'ouvrage de PALLASCIO, R., *Mathématiques instrumentales et projets d'enfants,* Montroyal (Québec): La spirale.

[52] Voir thèse déjà citée.

[53] Institut de recherche sur l'enseignement mathématique de Paris VII (1987),*Situations d'apprentissage en géométrie, 6ème-5ème,* Paris: IREM de Paris VII.

[54] ERMEL (1991), *Apprentissages mathématiques en 6°,* Paris: Hatier.

[55] KUZNIAK, A. (1994), *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré,* Thèse de didactique des mathématiques, Université de Paris VII, Paris.

[56] Il y a quelques modifications, que nous estimons mineures.

tombant chez les bushmen [57]... Nous adoptons ainsi la position de la didactique professionnelle : notre propos est de chercher à repérer des régularités dans les prises de décisions des enseignants concernant l'enseignement des décimaux[58]. En conformité avec la position des ergonomes, cette analyse nous paraît préalable à toute action de formation (initiale ou continue) qui viserait à améliorer l'efficacité professionnelle des enseignants.

2.2- Choix méthodologiques

Nous avons donc choisi de faire des propositions à des enseignants, *en les laissant libres* de les utiliser, de les modifier... ou de les rejeter, notre but étant de mettre les choix des enseignants en relation avec les contraintes institutionnelles (programmes en particulier), leurs caractéristiques professionnelles, les niveaux où ils enseignent et les performances de leurs élèves.

Nous avons choisi de fournir à ces enseignants *quelques situations extraites des progressions de référence*. Ce faisant, nous avons pris le risque de rompre la cohérence des progressions de référence. Nous avons présenté plus haut des arguments à l'appui de notre position : nous estimons qu'il est vain d'espérer une réappropriation d'ensemble des progressions, dans les conditions ordinaires de l'enseignement.

Nous avons choisi de *mélanger les situations extraites des progressions de référence en les réécrivant et d'y adjoindre quelques situations de notre cru.* Les brochures décrivant les progressions présentent des disparités d'écriture : une juxtaposition d'extraits des brochures risquait de rendre peu lisibles les documents soumis aux enseignants. Nous avons choisi d'homogénéiser les présentations. L'ajout de quelques situations de notre cru a été fait dans le but de confirmer certaines oppositions ou ressemblances.

Le choix des situations extraites des progressions de référence résulte de *trois études préalables* :
- une étude comparative des changements intervenus dans les programmes officiels d'enseignement au cours moyen et au début de l'enseignement secondaire, depuis le début du siècle,
- une étude comparative des progressions de référence, du point de vue de la didactique des mathématiques,
- une étude comparative de séquences d'enseignement des décimaux, du point de vue didactique des mathématiques, les séquences étant extraites de deux manuels de CM1 et deux manuels de sixième dont les auteurs sont proches de la sphère des chercheurs en didactique des mathématiques.

Ces trois études ont été conduites dans la perspective de dégager des stabilités et des variantes dans l'enseignement des décimaux, de déceler d'éventuels points de blocage ou zones de souplesse. Ce sont ces points qui ont servi d'ancrage pour le choix des extraits des progressions de référence.

Nous avons choisi de confier les suggestions de séquences à un *nombre limité d'enseignants volontaires du primaire et du secondaire*. Ce faisant, notre étude a un caractère qualitatif et non

[57] Allusion au film de Jamie UYS (1980), *Les dieux sont tombés sur la tête* (The Gods must be crazy), Cat Films Productions.

[58] Même si les résultats de la didactique professionnelle sont encore peu nombreux dans le domaine de l'enseignement mathématique...

statistique. Le volontariat peut créer des distorsions : nous examinerons ce point au chapitre VI. En contrastant les deux ordres d'enseignement, nous nous donnons la possibilité de vérifier une éventuelle continuité des pratiques, par delà la disparité des profils de recrutement des personnels.

Nous avons choisi, enfin, de *recueillir l'avis des enseignants lors d'entretiens*, parce que nous voulions observer comment les enseignants rationalisaient leurs choix (leurs "bonnes raisons"). Nous recueillons des discours et non des actions, au risque de distorsions entre ce que disent les enseignants et ce qu'ils font. Pour limiter cette distorsion, nous avons fait un *recueil parallèle des exercices et évaluations individuelles* donnés tout au long de l'année. L'avis des enseignants peut être fortement influencé par le niveau de leurs classes. Aussi avons-nous prévu *deux questionnaires destinés aux élèves*, un au début d'année et l'autre en fin d'année.

Notre but est de dégager des profils d'enseignants face à l'enseignement des décimaux.

3- Annonce du plan de la thèse

Nous étudierons au chapitre II les textes officiels en les situant dans leur évolution depuis le début du siècle. Nous étudierons en particulier comment les ministères successifs ont légitimé les changements qu'ils apportent à l'enseignement des décimaux.

Nous présenterons au chapitre III les champs conceptuels des décimaux, tels qu'ils apparaissent dans les deux progressions de référence.

Nous comparerons au chapitre IV quelques manuels récents dont les auteurs sont proches de la didactique. Nous situerons les choix des auteurs de ces manuels par rapport aux progressions de référence. Nous en dégagerons les hypothèses retenues pour la rédaction des suggestions soumises aux enseignants.

Nous présenterons au chapitre V les suggestions soumises aux enseignants, ainsi qu'une analyse a priori de leur utilisation.

Nous décrirons les classes associées à l'expérimentation et nous analyserons les choix faits par les enseignants au chapitre VI.

Chapitre II

STABILITÉ ET VARIATIONS DANS LES PROGRAMMES D'ENSEIGNEMENT SUR LES DÉCIMAUX

Nous avons élucidé au chapitre précédent l'importance de l'examen des contraintes et marges de jeu des enseignants. Dans ce chapitre, nous allons étudier l'évolution des contenus d'enseignement imposés, en présentant les changements intervenus dans les "programmes officiels" concernant l'enseignement des décimaux. Nous nous situons donc dans le contexte institutionnel.

Nous partirons de la fin du XIXème siècle pour l'école primaire et du début du XXème siècle pour l'enseignement secondaire. Nous arrêterons notre étude avec les textes de 1985 pour l'école primaire et le collège. Nous évoquerons les nouveautés des textes de 1995 pour l'école primaire et la classe de sixième, sans pouvoir achever l'analyse, car les textes d'accompagnement annoncés n'ont pas encore été publiés.

1. Le cadre de l'étude

Nous avons situé notre analyse dans une perspective ergonomique. Transposant dans le domaine de l'enseignement ce que Samurçay & Rogalski ont écrit de la légitimité des savoirs de référence, nous avons cherché, à chaque variation des textes de programmes officiels, quelle pouvait en être la légitimité.

1.1- Pertinence et légitimité d'un programme d'enseignement

En France, à la différence d'autres pays, les programmes d'enseignement ont un caractère officiel, ils sont imposés. Ils ne décrivent pas ce qui est fait dans les classes, mais ils mettent en valeur les contenus de savoir sur lesquels l'institution, par sa voie ministérielle, a pris position.

L'analyse d'un programme d'enseignement peut se faire en termes de pertinence ou de légitimité.

Analyser la pertinence d'un programme d'enseignement, c'est se placer du point de vue pragmatique de son efficacité. On peut avoir des informations directes sur son efficacité pédagogique si l'on dispose, de façon régulière, d'évaluations sur les performances des élèves permettant de juger si les textes prescrits sont suivis d'effets manifestes. La pertinence d'un programme n'est pas seulement à estimer du point de vue de sa compatibilité avec les capacités d'apprentissage des enfants : elle concerne aussi la prise en compte des attentes et des compétences professionnelles des enseignants en exercice, la conformité avec les priorités que le pays a fixées pour l'enseignement, la compatibilité avec l'organisation de la vie scolaire sur l'ensemble du territoire national... En toute rigueur, on ne pourrait donc juger de la pertinence d'un programme qu'après coup, quand a eu lieu "l'épreuve de la réalité" qui trie entre ce qui a pu être intégré par le système et ce qui, au bout d'un certain temps, n'est pas parvenu à l'être et se trouve supprimé par un nouveau programme.

La légitimité d'un programme d'enseignement ne se confond pas avec sa pertinence. Elle est établie quand toute polémique à son sujet est close. Le processus de légitimation s'observe dans l'argumentaire retenu par les différents partenaires associés à l'élaboration du programme (associations professionnelles, représentants élus des personnels, des syndicats, des parents d'élèves, commissions d'experts etc.). La légitimité d'un programme d'enseignement est donc relativement indépendante des pratiques scolaires du moment. Neyret (1995) [1] a montré, par exemple, que l'abandon des fractions à l'école primaire dans les programmes officiels de 1923 était lié à l'influence de Lebesgue dans les milieux ministériels.

Notre étude des programmes officiels dans ce chapitre porte donc sur la légitimité des programmes plutôt que sur leur pertinence, qui sera l'objet des chapitres étudiant les mises en œuvre (manuels, situations de classe) et les évaluations des élèves. Nous avons choisi de repérer les ajouts ou suppressions, d'un programme officiel au suivant, ainsi que les justifications ministérielles qui en étaient données dans les commentaires ou instructions. En effet, les points qui méritent justification sont généralement ceux sur lesquels le débat n'était pas clos. L'argumentation est développée autant en direction des enseignants que des parents ou plus généralement des citoyens. Dans le cas où aucune argumentation n'apparaît, un ajout par rapport à une version antérieure nous paraît pouvoir être interprété comme une "recommandation de ne pas oublier....". En cas de suppression, l'interprétation est plus difficile en l'absence de contrôle par des manuels majoritairement utilisés :
- soit le thème correspondant fait partie des pratiques scolaires, il est devenu banal, il est alors inutile de l'inscrire au programme,
- soit le thème est tombé en désuétude,
- soit le thème est controversé, et le Ministère ne souhaite pas prendre parti publiquement.

Nous avons regroupé ces changements autour de catégories qui nous ont paru pertinentes pour l'enseignement des décimaux : les références aux connaissances pratiques, les références à la discipline mathématique elle-même. En effet, nous avons montré au chapitre précédent que la filière primaire était organisée en fonction de savoirs pratiques d'adultes tandis que la filière secondaire avait des perspectives culturelles.

Avant de procéder à l'étude historique proprement dite, nous allons expliciter ces deux types de référence puis nous les illustrerons à propos des décimaux, en nous situant dans le contexte des programmes officiels en vigueur entre 1985 et 1995.

[1] NEYRET, R. (1995), *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les instituts universitaires de formation des maîtres*, Thèse de didactique des mathématiques Université Joseph Fourier Grenoble I, Grenoble, p. 88-89.

1.2- Connaissances pratiques, savoirs mathématiques

La comparaison entre connaissances pratiques et savoirs disciplinaires est faite par de nombreux chercheurs : Rogalski & Samurçay (1992), Tanguy (1991), Berthelot & Salin (1992) [2], Viard (1995), Conne (1995) [3]. Pour notre travail, nous avons transposé l'étude de Berthelot & Salin sur les connaissances spatiales et les savoirs géométriques.

Rappelons les analyses qu'ils ont faites.

Les connaissances spatiales des élèves se développent d'abord en dehors de l'école. Les problèmes sont posés dans l'espace physique et portent sur des objets perceptibles. Les critères de validité des solutions trouvées reposent essentiellement sur l'action.

Les savoirs géométriques sont des savoirs scolaires, ils résultent d'un enseignement délivré par des professeurs de mathématiques. Les problèmes posés sont d'ordre spéculatif, le dessin n'étant qu'un schéma facilitant la structuration des données : le tracé a une épaisseur, la droite n'a pas d'épaisseur ; la droite dessinée n'est pas l'objet mental, le dessin représente la classe de toutes les situations compatibles avec les données. Les critères de validité des solutions trouvées reposent sur le raisonnement déductif [4].

Dans l'enseignement, le recours à des dessins provoque des malentendus entre élèves et professeurs sur ce qui fait l'objet de la leçon. Berthelot & Salin ont analysé en particulier l'exercice où l'on demande aux élèves de tracer plusieurs triangles, dont un triangle de dimensions 9, 5 et 4. Les élèves arrivent à tracer un triangle, de forme très "allongée" : ils se situent dans l'espace physique. Leur professeur, se situant dans le contexte du savoir géométrique, attend de la part des élèves une justification théorique de l'alignement des trois sommets.

Socialement, les compétences spatiales sont utiles. Berthelot & Salin jugent qu'elles mériteraient un renforcement scolaire. Ils soulignent que la résolution de problèmes "en vraie grandeur" n'est pas de même nature que celle où le réel est seulement évoqué.

Les distinctions faites entre connaissances pratiques et savoirs mathématiques nous paraissent pertinentes pour analyser les phénomènes concernant l'enseignement des nombres décimaux. Pour ce faire, nous avons distingué deux types de décimaux : les décimaux associés aux grandeurs familières et les décimaux des cours de mathématiques, pris à une époque donnée. On pourrait faire une analyse utilisant la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1981, 1991) pour montrer que les deux types de décimaux ne constituent pas les mêmes objets : en effet, les types de problèmes dans lesquels ils interviennent, les concepts en jeu, les formes langagières ou non langagières associées ne sont pas les mêmes.

---

2 BERTHELOT, R., & SALIN, M.H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire,* Thèse de didactique des mathématiques, Université de Bordeaux I, Bordeaux.

3 CONNE, F. (1995), Trois pas de deux entre savoirs et connaissances, in G. ARSAC, J. GRÉA, D. GRENIER & A. TIBERGHIEN, *Différents types de savoir et leur articulation,* (pp. 253-278), Grenoble: La pensée sauvage.

4 Ceci est vrai au moins dans les civilisations occidentales actuelles, influencées par la rationalité grecque. Lors de l'école d'été de didactique des mathématiques 1995, Noirfalise, s'appuyant sur les travaux de Martzlof, a montré que les mathématiciens chinois ont développé d'autres systèmes de validation de leurs connaissances géométriques.

1.3- Les décimaux associés aux grandeurs familières

Les grandeurs familières sont celles que l'on rencontre dans la vie courante. Les décimaux associés expriment des mesures de prix, longueurs, masses, volumes... L'addition ou la soustraction des décimaux sont reliées aux situations physiques d'additivité des grandeurs : mise bout à bout pour des longueurs, réunion de masses... La comparaison des nombres décimaux se fait en revenant à la signification des unités de grandeur.

Dans l'utilisation courante des grandeurs familières, il n'y a *pas d'incertitude* (au sens des physiciens) : les mesures de grandeurs sont prises pour des valeurs exactes. Même à l'école primaire où l'enseignant est polyvalent, après les premières leçons sur les unités de grandeurs, qui incluent en général l'estimation ou l'approximation, la suite des cours se déroule avec des mesures considérées comme exactes. L'idée de tolérance (au sens des technologues) ne nous paraît pas plus répandue chez des adultes : nous l'avons personnellement observé plusieurs années de suite avec de futurs enseignants d'école primaire dans la situation décrite ci-dessous, inspirée des travaux de Izorche (1977) [5].

> Consigne : Le nombre d'or est très connu des architectes, on le retrouve dans la nature.
>
> φ = 1,61803389....
>
> On prend les arrondis de φ successivement dans D3, les décimaux à 3 chiffres après la virgule, puis dans D4, les décimaux à 4 chiffres après la virgule, puis dans D5, D6, D7, etc., c'est-à-dire :
>
> d3 = 1,618
> d4 = 1,618
> d5 = 1,61803
> d6 = 1,618034 etc.
>
> Vous supposerez que vous avez à représenter sur une demi-droite numérique les nombres d3, d4, d5, d6, etc. avec l'échelle suivante : une distance de 1 dans les nombres est représentée par 20 cm sur la demi-droite. Vous supposerez que vous disposez d'un crayon qui permet de distinguer des points séparés d'un demi-millimètre. Déterminez à partir de quel rang on ne peut plus distinguer les arrondis.

Ces futurs enseignants d'école primaire trouvent la question étrange : ils ne la relient ni à leur passé scolaire ni aux exigences des programmes officiels [6] ni aux nécessités de la vie pratique.

A chaque unité de grandeur est associé un *format privilégié pour l'écriture* du nombre décimal : les francs s'écrivent avec deux chiffres après la virgule, les mètres avec deux chiffres après la virgule, les centimètres avec un chiffre après la virgule, les kilogrammes avec trois chiffres après la virgule...

Notre fréquentation des classes primaires montre que les élèves décodent les décimaux associés aux grandeurs familières en recourant à deux unités du système métrique [7]. Par exemple, 5,2 cm

[5] IZORCHE, M.L. (1977), *Les réels en classe de seconde*, Mémoire de DEA, Université de Bordeaux I, Bordeaux.

[6] L'arrondi y est cité au moment du calcul d'estimation, et non en référence aux grandeurs.

[7] Voir chapitre VI et aussi TANNER, M. (1992-93), Le décimal n'existe pas - Théorie et applications, *Revue Grand N n° 52*, 43- 47.

signifie 5 cm et 2 mm ; 7,350 km signifie 7 km et 350 m. La juxtaposition des parties entière et décimale est interprétée immédiatement. Elle est compatible avec les algorithmes de l'addition et de la soustraction en faisant les échanges nécessaires.

Il est fréquent que les élèves ne fassent pas de lien entre la partie décimale et la division par 10 ou 100 ou 1000 de l'unité de grandeur. C'est ainsi que des élèves, cherchant la moitié de 7,5 cm disent : 3 centimètres et demi, 2 millimètres et demi. Le demi-centimètre n'est pas évalué en millimètres.

Pour la multiplication des décimaux et la division de décimaux associés aux grandeurs familières, les *problèmes multiplicatifs* sont, en général, de la catégorie *proportionnalité simple*, où multiplicande et multiplicateur sont des nombres décimaux (Levain, 1994) [8]. Dans la vie courante, les élèves (et les adultes dans leur majorité) font confiance aux balances automatiques qui dispensent l'usager d'exécuter les calculs multiplicatifs : elles fonctionnent, pour eux, comme des "boîtes noires". L'*arrondi des instruments automatiques* ne fait pas partie des savoirs des élèves, qui pensent que la machine tronque l'écriture du nombre au format habituel. Donnons-en un exemple.

> Les tickets de caisse fournissent des indications du genre :
> Oranges 0,935 kg 13,40 F/kg 12,55 F
>
> La masse indiquée (0,935 kg) est en général donnée à 5 g près.
> Le prix "exact" du point de vue des décimaux a 3 chiffres significatifs à la partie décimale (12,529). La machine l'a arrondi à 12,55 F, ce qui correspond au multiple de 5 centimes le plus proche. Les élèves tronquent à 12,52 et, comme il n'y a pas de pièces de 1 centime, arrondissent à 12,50 F.

Les arrondis commerciaux de "prix à l'unité", ceux par exemple qui permettent au consommateur de mieux choisir les produits dans les libres-services, ne font pas partie des savoirs des élèves. En revanche, certains élèves ont une pratique de l'arrondi au demi-point quand leurs enseignants leur demandent de calculer des moyennes de notes [9].

La catégorie de problèmes multiplicatifs *produit de mesures* ou *proportionnalité double* avec décimaux ne fait pas partie des connaissances pratiques des élèves : pour s'en convaincre, il suffit d'écouter les enseignants se plaindre des erreurs systématiques sur les conversions d'unités d'aire ou de volume. Pourtant, une simple (?) égalité permettrait aux élèves de contrôler leurs réponses [10] :

---

8 LEVAIN, J.P. (1994), *Proportionnalité et acquisition des concepts d'agrandissement et d'échelle*, Thèse de psychologie, Université René Descartes Paris V, Paris.

9 Ce savoir est-il courant ? Il n'est pas rare de voir des tableaux statistiques sur des populations d'effectif inférieur à 100 où les pourcentages sont exprimés avec 1 chiffre après la virgule...

10 L'égalité est simple à utiliser, moins facile à fonder d'un point de vue axiomatique. Voir DOUADY, R. (1980), Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans), *Recherches en didactique des mathématiques, Vol 1, 1,* 77-110.
Sur la disparition des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques, voir ROUCHE, N. (1992), *Le sens de la mesure*, Bruxelles: Didier/Hatier, ainsi que ROUCHE, N. (1994), Des grandeurs aux nombres rationnels, *Actes du colloque inter-IREM de géométrie 1992* (pp. 17-27), IREM de Limoges.

$$
\begin{aligned}
1\ m^2 &= 1\ m \times 1\ m \\
&= 100\ cm \times 100\ cm \\
&= 100 \times 100 \times cm \times cm \\
&= 10\ 000\ cm^2
\end{aligned}
$$

Dans les usages scolaires qui sont faits des problèmes multiplicatifs ou les problèmes de division associés, l'habitude est de se placer dans de "bons cas" : il n'y a pas d'arrondi à faire. Cet usage scolaire renforce l'idée que les nombres décimaux ont une partie décimale limitée après la virgule (1, 2 ou 3 chiffres selon l'unité de grandeur).

Notre fréquentation des classes et l'observation d'adultes en formation nous ont montré que la majorité des élèves et bon nombre d'adultes ne font pas de différence entre le nombre affiché à la calculatrice et le "vrai nombre" mathématique. Cette conception est sans danger pour la quasi totalité des calculs pratiques. En effet, ils n'ont pas besoin de maîtriser les savoirs algébriques correspondant aux approximations faites par la calculatrice. Donnons-en un exemple.

La calculatrice, selon le modèle, travaille exclusivement sur des décimaux, ou sur des décimaux arrondis.

Calculatrice "bas de gamme"

Ce que l'on tape	Ce qui apparaît sur l'écran	Le nombre calculé
2 : 3 =	0,666666	2 / 3
x 3 =	1,999998	(2/3) x 3 ou encore 2

Calculatrice scientifique

Ce que l'on tape	Ce qui apparaît sur l'écran	Le nombre calculé
2 : 3 =	0,6666667	2 / 3
x 3 =	2	(2/3) x 3 ou encore 2

On pourrait croire que la calculatrice "bas de gamme" opère sur des décimaux tronqués à un nombre fixé à l'avance de chiffres après la virgule et que la calculatrice scientifique opère toujours sur des rationnels. Ce dernier point est faux. En effet, regardons la séquence suivante faite avec une calculatrice scientifique [11] :

Ce que l'on tape	Ce qui apparaît sur l'écran	Le nombre calculé
2 : 3 =	0,6666667	2/3
x 1000000 =	666666, 67	$(2/3) \times 10^6$
- 666666 =	0,66666	$2\times 10^6 / 3 - 666\ 666$
x 3 =	1,99998	$2\times 10^6 - 1\ 999\ 998$ ou encore 2

11 Selon le modèle de la calculatrice scientifique, le nombre maximum de chiffres affichés et celui des chiffres de réserve peuvent être différents de ceux présentés ici.
Les calculatrices scientifiques utilisent des procédés d'arrondis sur des chiffres qui n'apparaissent pas à l'écran. Dans notre exemple, après la première série d'instructions (2 : 3 =), on voit apparaître à l'écran un nombre écrit avec 8 chiffres dont le chiffre le plus à droite est un 7 : ce chiffre provient d'un arrondi sur un chiffre 6 qui n'apparaît pas à l'écran (chiffre dit "de réserve").

On peut conclure que les décimaux associés aux grandeurs familières sont mieux maîtrisés dans les problèmes d'addition et de soustraction que dans les problèmes de multiplication et de division. Ces décimaux ont un "format" d'écriture résultant des usages sociaux. La calculatrice fonctionne comme une "boîte noire". La maîtrise de ce type de nombres est très voisine de celle des entiers.

1.4- Les décimaux du cours de mathématiques

Les décimaux du cours de mathématiques sont associés on non aux grandeurs. La consultation de manuels nous permet d'affirmer que des calculs additifs et soustractifs sont faits à propos de grandeurs simples, des calculs de multiplication et de division à propos de grandeurs quotients et de grandeurs produits. Nous avons déjà vu que, dans le cas de la multiplication ou de la division, les enseignants recourent en général à de "bons nombres", ce qui évite d'avoir à traiter la question de l'arrondi.

Les décimaux du cours de mathématiques sont aussi travaillés pour eux-mêmes, sans référence aux grandeurs, en tant qu'*ensemble de nombres*. Leur écriture n'a *pas de format imposé*. Par exemple, on peut écrire en cours de mathématiques :

$$1 + 0{,}00056 + 7{,}2$$

Remarquons au passage que cette écriture n'a pas de sens en physique, au moins à la tranche d'âge que nous considérons, et cela pour au moins deux raisons.

Les physiciens distinguent *1* et *1,000*. En effet, l'écriture du nombre leur donne une information sur la précision de la mesure de la grandeur (directe ou indirecte). L'écriture *1,000* est plus précise que l'écriture *1*.

Il est très rare en physique que l'on obtienne des mesures (directes ou indirectes) avec plus de 4 chiffres significatifs. Le *0,00056* est de poids négligeable par rapport à *1* et *7,2* : on ne le mentionnerait que provisoirement pour indiquer qu'on le néglige dans le calcul.

On trouve deux types d'usage des écritures décimales : le calcul à faire ou la préparation au calcul algébrique.

A l'école primaire, la majorité des écritures de nombres correspondent à un *calcul à faire* [12] : le calcul, une fois achevé, fournit l'écriture "canonique" du nombre en base dix. Par exemple, *3,6 : 10* est une écriture, non canonique, de *0,36*.

Cette idée de "calcul achevé" perdure au collège. Notre expérience enseignante rejoint ce que Neyret (1995) [13] décrit à propos d'élèves de collège : ils "rabattent" les rationnels et réels sur les décimaux. Pour eux, ces nombres n'ont d'existence que parce qu'on leur a associé une écriture décimale [14] : par exemple, $\sqrt{2}$ est un nombre parce qu'il s'écrit 1,414... ou encore $\pi = 3{,}14$.

---

12 Nous l'avons observé sur quatre manuels courants pour le cours élémentaire. Les décompositions additives ou multiplicatives se rencontrent à l'occasion de l'étude de la numération décimale.

13 NEYRET, R., op. cit. p. 138.

14 En physique, les calculs sont achevés quand apparaît une valeur approchée décimale du nombre cherché.

Au collège, les enseignants introduisent de nouveaux nombres par les écritures de quotients de décimaux, sans qu'il soit nécessaire de "calculer" les nombres correspondants. Ces quotients de décimaux servent de tremplin à l'*introduction au calcul algébrique* en vue du traitement des équations et inéquations. Citons, à ce propos, un extrait des instructions officielles pour la classe de sixième de 1985.

> **2.2 Écriture fractionnaire de décimaux**
> Les travaux conduiront à l'écriture d'un nombre décimal sous diverses formes fractionnaires : initiation à la manipulation des fractions. Les techniques des opérations +, -, x ne seront exposées que dans le cas d'écritures fractionnaires ayant pour dénominateurs des puissances de dix, et cela en liaison étroite avec les techniques opératoires en écriture décimale. (...)
>
> **2.3 Quotient de décimaux**
> Il s'agit ici d'un simple jalon vers un élargissement des opérations. Dans ce paragraphe, on travaille uniquement sur des exemples numériques et au travers de problèmes. Ces travaux dégagent et utilisent les deux idées suivantes :
> - le quotient *a/b* de deux nombres décimaux est un nombre qui multiplié par *b* donne *a*,
> - on ne change pas le quotient quand on multiple *a* et *b* par un même nombre non nul.
>
> La multiplication d'un nombre décimal par un quotient intervient, en particulier, dans des problèmes de proportionnalité.

Le changement de statut de l'écriture des nombres constitue la base du travail algébrique. Les égalités résultant du passage de l'écriture décimale à l'écriture fractionnaire (ou l'inverse) en sont la première étape.

La perspective des enseignants de mathématiques est d'étendre progressivement les systèmes de nombres : des entiers aux décimaux, des décimaux aux rationnels en passant par les fractions décimales et les quotients de décimaux, puis des rationnels à une partie des réels en passant par les équations. A chacun de ces systèmes de nombres correspondent des écritures différentes. La coordination des différents registres fait partie des savoirs inscrits aux programmes officiels de collège : elle ne va pas de soi (Duval, 1995, Munyazikwiye, 1995). Nous prenons à notre compte ce que Duval dit d'un des changements de registre [15].

> L'écriture d'un nombre représente un nombre et a une signification opératoire liée aux traitements permettant d'effectuer des opérations. Les traitements ne sont pas les mêmes pour l'écriture décimale et l'écriture fractionnaire. Bien que 0,25 et 1/4 représentent le même nombre, ils n'ont pas la même signification opératoire. La signification opératoire dépend du système d'écriture. Ce ne sont pas les mêmes règles de traitement pour calculer 0,25 + 0,25 et pour calculer 1/4 + 1/4. La conversion de 0,25 ne relève pas d'un calcul mais du jeu de la différence entre signification et référence décrit par Frege (1971) dans son célèbre article de 1892.

[15] DUVAL, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine, Représentations sémiotiques et apprentissages intellectuels;* Berne: Peter Lang, p. 64.

La consultation de nombreux manuels d'école primaire ou de collège nous permet d'affirmer que la majorité des enseignants souhaite marquer la différence entre entiers et décimaux : ce sont *de nouveaux nombres* [16] qui n'ont pas les mêmes propriétés que les entiers, en particulier on peut intercaler indéfiniment des décimaux entre deux décimaux donnés, ce qui n'est pas le cas pour des entiers. Cette intercalation est toujours illustrée au moyen d'une *droite numérique* (ou demi-droite numérique). La maîtrise de la droite numérique permettra celle des graphiques de fonctions numériques.

Sur la droite numérique, la proportionnalité entre écarts numériques et distances géométriques est toujours respectée, mais elle ne semble pas être un objet d'enseignement, puisqu'il n'en est pas fait mention dans les programmes officiels.

> **Classe de cinquième**
> Sur une droite graduée :
> - lire l'abscisse d'un point donné,
> - placer un point d'abscisse donnée,
> - calculer la distance de deux points d'abscisses données.

Ce point mérite d'être souligné, car il va à l'encontre d'observations faites par Bessot & Eberhard (1983) [17], Vergnaud (1987) [18] et Perrin (1992) [19].

A propos des longueurs, Bessot & Eberhard ont constaté que la coordination des nombres-mesures et des nombres-repères de la règle graduée n'était pas facilement obtenue chez les élèves.

> [Les élèves] ont établi lors du processus une distinction entre les nombres-mesures et les nombres-repères : pour eux, à deux objets de même longueur correspond un seul nombre-mesure(...), alors qu'il peut correspondre des nombres-repères différents selon l'utilisation de la règle. (...) Cependant, la seule mise en relation entre nombres-mesures et nombres-repères est le constat, fait par certains élèves seulement, de l'identité entre les nombres quand on utilise la règle en partant du zéro. (...)
>
> [Notre recherche] conduit à proposer une finalité pour un apprentissage à long terme sur la mesure des longueurs : mettre en place chez l'élève une conception englobant et coordonnant les deux modèles, de mesure et de repérage. [20]

Vergnaud confirme la difficulté qu'ont les jeunes élèves à situer sur une droite non graduée des informations numériques (dates, masses). Si l'ordre est respecté, bien souvent les différentes données sont mises "bout à bout", comme pour séparer les signifiants correspondant à des objets différents, sans proportionnalité.

---

[16] COMITI, C., & NEYRET, R. (1979), A propos des problèmes rencontrés dans l'ensemble des décimaux au cours moyen, *Grand N n° 18.*

[17] BESSOT, A. & EBERHARD, M. (1983), Une approche didactique des problèmes de la mesure, *Recherches en didactique des mathématiques Vol 4.3*, 293-324.

[18] VERGNAUD, G. (1987) , Les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant, in J. PIAGET, P. MOUNOUD & J.P. BRONCKART, *Psychologie* (pp. 821-843), Paris: Gallimard, Encyclopédie de la Pléiade, série méthodique.

[19] Op. cit.

[20] Op. cit. p. 322.

Le principe de "ponctualisation", qui permet de représenter une distance à l'origine par un point, ne va pas de soi. Cette ponctualisation suppose une identification entre l'ensemble des segments partant de l'origine et l'ensemble des points d'arrivée.

Perrin s'interroge sur l'apprentissage de l'axe gradué. Dans l'enquête qu'elle a faite dans des classes primaires et secondaires, le placement de nombres sur l'axe gradué a été l'exercice le moins bien réussi dans toutes les classes. Le placement est souvent fait "à l'oeil", ou en utilisant une échelle de type 1 ou 1/10 (suivant les nombres proposés), c'est-à-dire traduisant les informations numériques fournies en centimètres ou millimètres. Elle suggère :

> Le placement de nombres sur un axe gradué demande un apprentissage spécifique. (...) L'utilisation abusive des centimètres et millimètres [par les élèves] nous semble provenir de l'introduction des nombres décimaux à partir des changements d'unité dans les mesures de longueur faites avec les unités légales. Un moyen de remettre en cause ce modèle nous semble être la mise en place d'une dialectique entre la construction des nombres et celle d'une mesure des longueurs (au sens d'application mesure) à partir d'un segment unité quelconque. Le placement sur l'axe gradué nécessite de plus de relier l'abscisse à la mesure d'une longueur. Le placement sur une graduation nous paraît de nature à pouvoir aider les élèves à conceptualiser la notion de nombre non entier indépendamment de l'écriture.

Ce long développement confirme ce que nous annoncions au début : les décimaux liés aux grandeurs familières ne sont pas les mêmes objets que les décimaux du cours de mathématiques, au moins dans la période récente.

Nous allons examiner maintenant les textes de programmes officiels en cherchant quelle argumentation a été avancée pour justifier les changements concernant l'enseignement des décimaux. Bien que notre étude concerne les décimaux, notre regard sur les programmes officiels inclut les rationnels (ou fractions) et la proportionnalité : en effet, les problèmes à résoudre lient souvent ces trois domaines mathématiques.

Pour la suite de l'exposé, nous présentons successivement les programmes officiels de l'enseignement primaire, puis ceux de l'enseignement secondaire. Des extraits de ces textes figurent en annexe.

2. L'évolution des programmes officiels pour le cours moyen

Nous avons pris pour point de départ de notre étude les textes de 1887, qui correspondent à la grande réforme de Jules Ferry.

La méthode d'enseignement est encore de type concentrique de façon à permettre à des enfants dont la scolarité est tardive ou brève ou irrégulière de tirer un profit maximum de leur présence à l'école, ce qui serait impossible dans un enseignement organisé de manière progressive. Les thèmes à aborder sont donc très voisins d'un cours à l'autre, car l'enseignant doit reprendre en approfondissant ce qui a été fait au cours précédent [21].

21 Les trois cours (élémentaire, moyen, supérieur) sont de création récente pour l'académie de Paris (1868) et ont été généralisés en 1878 à toute la France.

2.1- Le contraste des extrêmes

Le libellé des programmes officiels de 1887 est très court, en comparaison de ce que nous connaissons aujourd'hui.

Cours moyen, de 9 à 11 ans, rubrique "Calcul arithmétique" (1887
Révision du cours précédent.
La division des nombres entiers.
Idée générale de fractions.
Les fractions décimales.
Application des quatre règles aux nombres décimaux.
Règle de trois, règle d'intérêt simple.
Système légal des poids et mesures.
Problèmes usuels et exercices d'application. - Solutions raisonnées.
Suite et développement des exercices de calcul mental appliqués à toutes ces opérations.

Cycle des approfondissements, rubrique "Nombres et calcul" (199!
* Nombres naturels :
  - numération décimale (interprétation de l'écriture chiffrée d'un nombre),
  - ordre sur les naturels (utilisation des signes < et >),
  - relations arithmétiques entre les nombres (double, moitié, tiers... pour des nombres simples ; multiples de 2, 5 et 10),
  - techniques opératoires de la soustraction de la multiplication, de la division euclidienne,
  - pratique du calcul exact ou approché en utilisant :
    . les techniques opératoires,
    . le calcul réfléchi (mentalement ou avec l'aide de l'écrit)
    . la calculatrice dans les situations où son usage s'avère pertinent,
    . l'ordre de grandeur (encadrement, valeur approchée),
  - problèmes relevant de l'addition, la soustraction, la multiplication, la division euclidienne.
* Fractions simples : écriture, comparaison de fractions de même dénominateur.
* Nombres décimaux :
  - écriture à virgule, écriture fractionnaire, passage d'une écriture à l'autre,
  - ordre sur les décimaux (comparaison, encadrement),
  - pratique du calcul exact ou approché en utilisant :
    . les techniques opératoires (addition, soustraction ; multiplication et division d'un décimal par un entier)
    . le calcul réfléchi (mentalement ou avec l'aide de l'écrit),
    . la calculatrice dans les situations où son usage s'avère pertinent,
    . l'ordre de grandeur (encadrement, valeur approchée),
  - problèmes relevant de l'addition et de la soustraction, de la multiplication et de la division d'un décimal par un entier, de la division euclidienne de deux entiers.
* Première approche de la proportionnalité :
  - reconnaissance de situations de proportionnalité dans des cas simples (échelles, pourcentages),
  - utilisation de tableaux, diagrammes, graphiques.

Les textes de 1995 sont beaucoup plus détaillés que ceux de 1887 [22].

[22] Nous n'avons pas reproduit le paragraphe qui concerne la mesure, qui occupe 20 lignes dans le bulletin officiel n°5 du 9 mars 1995.

Le vocabulaire associé à l'enseignement mathématique a considérablement évolué. Les "règles" sont devenues des "techniques opératoires", la "règle de trois" s'est transformée en "proportionnalité" dont on ne fait qu'une "première approche". La division est devenue "euclidienne", sauf quand il s'agit de la division d'un décimal par un entier où on ne la qualifie pas. On parle "d'écriture" d'un nombre. Le préambule du texte de mathématiques indique, d'ailleurs, que l'élève, au cycle des approfondissements, "découvre de nouveaux nombres : les nombres décimaux et les fractions"[23]. Le calcul mental n'est plus qu'une sous-rubrique d'une rubrique "pratique du calcul exact ou approché". Les textes officiels d'aujourd'hui font allusion à des outils organisateurs d'information : tableaux, schémas, graphiques.

2.2- 1923 : les décimaux ressemblent aux entiers

Les programmes officiels de 1923 introduisent la méthode "progressive". En effet, quarante ans après les lois Jules Ferry sur l'obligation scolaire, la scolarisation de tous les enfants de 6 à 12 ans est pratiquement réalisée. La méthode concentrique n'est plus nécessaire : la fréquentation scolaire permet de répartir les contenus d'enseignement sur l'ensemble des cours, depuis le cours préparatoire qui est intégré à l'école élémentaire. Il est prévu une prolongation de la scolarité pour une partie de la population scolaire, avec l'enseignement primaire supérieur et l'école normale.

En mathématiques, sous l'influence de Lebesgue[24], les décimaux sont traités maintenant avant les fractions, qui elles-mêmes se limitent aux fractions ordinaires. La liaison entre système métrique et nombres décimaux est explicitement recommandée dans les instructions. Les décimaux sont considérés comme des entiers : c'est la pratique des unités du système métrique qui en facilite l'étude. Le passage des décimaux aux fractions décimales puis aux fractions ordinaires est considéré comme un changement d'écriture dont le traitement sera aisé, car progressif.

> **Calcul, arithmétique et géométrie (1923)**
> (...) Pratiquement, l'étude des sous-multiples dans les mesures légales à base dix conduit aux nombres décimaux. Rien, logiquement, ne distingue les nombres décimaux des nombres entiers ; aussi leur étude, suite immédiate de ce qu'on sait déjà, les calculs où ils interviennent, analogues à ceux qu'on a souvent exécutés, n'embarrassent guère les élèves.
> Or ces nombres décimaux peuvent s'écrire comme fractions décimales, presque immédiatement. Et c'est ce que demande le programme actuel, en vue de sérier les difficultés. On écrira ces nombres comme fractions :
> 0,1 .... 1/10
> 0,01 .... 1/100
> On aura des fractions à dénominateur 10, 100, 1000. On fera sur ces fractions particulières tous les exercices de réduction au même dénominateur, d'addition, de soustraction, etc. Dans la suite pour les fractions ordinaires, selon toute vraisemblance, les élèves seront moins surpris, mieux préparés. La voie inclinée sera plus aisée que la voie abrupte.

Le changement de programmes, concernant les décimaux, est donc légitimé de deux manières :
- il est relié à l'usage pratique des unités du système métrique,
- il prépare le calcul des fractions ordinaires, de façon progressive.

23 Bulletin officiel de l'Education nationale n°5, 9 mars 1995, p. 35.
24 Voir NEYRET, op. cit.

2.3- 1945 : nombres concrets, nombres abstraits

Les auteurs des programmes de 1945 soulignent l'unité d'inspiration avec ceux de 1923. Le programme du cours moyen ne distingue plus calcul arithmétique et géométrie. Il comporte des nouveautés, comme le prix et poids à l'unité et exemples analogues de quotients, et l'utilisation des caractères de divisibilité pour la simplification d'un quotient et d'une règle de trois.

Les instructions sont plus abondantes qu'en 1923, et comportent des recommandations pour chacun des cours. Elles n'hésitent pas à rentrer dans le détail de certaines justifications ou proposer des séries d'exemples. Elles s'appuient sur la notion de "nombres concrets", c'est-à-dire un "renseignement sur une grandeur (...) complété par l'indication de ce qu'on veut faire de cette grandeur". Les références à la vie courante, à l'usage pratique sont plus nombreuses dans le libellé du contenu des programmes et dans les instructions, pour marquer "la volonté d'une relation étroite entre les mathématiques de l'école et les nécessités de la vie".

Comme en 1923, on propose de justifier les calculs sur les décimaux en faisant des changements d'unités. Les fractions décimales ont disparu, mais les pourcentages sont mentionnés. Les pourcentages et les fractions simples seront les premiers exemples rencontrés par les élèves de nombres "abstraits et indépendants des unités". Les instructions officielles mentionnent de nombreuses justifications d'ordre mathématique à des règles de calcul. Dans le cas des problèmes de division, l'interprétation du reste est faite dans le contexte des grandeurs.

Extrait des instructions pour le cours moyen (1945)
Nombres décimaux. - L'usage des nombres décimaux (...) est maintenant entré dans la pratique de la vie courante. (...)
Il importe (...) de faire comprendre et apprendre la règle du déplacement de la virgule, soit par changement d'unité, soit par multiplication ou division par 10, 100, 1 000. Pour cela il est au moins commode d'utiliser toutes les unités décimales du système métrique. Cependant dans les données et les résultats des problèmes, il vaut mieux se borner aux seules unités pratiques (indiquées dans les commentaires du cours élémentaire). Il est bon que les chiffres décimaux, complétés au besoin par des zéros, correspondent à des unités pratiques. On est ainsi amené à indiquer un nombre en francs avec deux décimales (c) ; un nombre en mètres avec deux ou trois décimales (cm ou mm) ; un nombre en kilomètres avec trois décimales (m) ; un nombre en litres avec deux décimales (cl) ; un nombre en mètres cubes avec trois décimales (dm^3), etc.

Opérations.
(...) On peut justifier la règle de la virgule dans la multiplication par un double changement d'unité. Par exemple :

3,40	x	7,25	peut être remplacé par
(f par litre)		(litres)	

0,034	x	725 = 24,65 f	
(f par cl)		(cl)	

De même pour la division

2,975	:	0,790	peut être remplacé par
(kg)		(kg par l)	

2975	:	790	=	3,76 litres ; reste 4,6 g
(g)		(g par l)		

Dans ce cas le remplacement n'est plus une explication mais une partie de la règle pratique. [25]
Ces exemples montrent en même temps combien peut être suggestif l'emploi de formules où chaque nombre est accompagné de l'indication de l'unité, ainsi qu'il a été dit pour le cours élémentaire. Cette façon d'écrire la division donne aussi une indication précise sur la nature concrète du reste.

Les changements apportés par rapport aux programmes et instructions antérieurs sont ici légitimés de deux manières :
- les nouveaux programmes sont reliés aux "nécessités de la vie", en particulier les décimaux doivent être écrits selon l'usage social,
- ils reposent sur les propriétés mathématiques du calcul d'unités de grandeur (nous dirions aujourd'hui "équations aux dimensions").

2.4- 1970 : l'introduction de l'algèbre à l'école primaire [26]

Le nombre de bacheliers n'a cessé de croître depuis la fin de la guerre : de 5 % d'une classe d'âge en 1950, il atteint 16 à 18 % dans les années soixante [27]. Le premier cycle de l'enseignement secondaire concerne de plus en plus d'élèves. Il devient possible d'envisager une continuité entre l'enseignement des classes élémentaires et celui du premier cycle.

En mathématiques, les textes officiels de 1970 créent une rupture, visible dans le libellé du programme de cours moyen, et surtout dans les commentaires qui en sont faits.

Les nombres ne sont plus liés aux mesures de grandeurs, ils ont un "nom" et une "écriture". Les opérations ont des "propriétés". La proportionnalité a remplacé la règle de trois. Toutes les fractions semblent au programme et non pas seulement les six fractions simples énumérées dans le texte de 1945. On n'ajoute plus les fractions, on ne les compare plus : c'est maintenant leur produit qui est à étudier. Les relations entre les concepts de fraction, fraction décimale, nombre décimal ne sont plus à enseigner. Il n'y a plus de liste de problèmes qui soient associés aux décimaux.

Les commentaires comportent trente-quatre pages où apparaissent pour la première fois des expressions jusqu'ici inconnues dans l'enseignement mathématique : couple de nombres, division exacte, division euclidienne, technique opératoire, opérateur, tableau de nombres, schéma de relation [28].

Les nombres concrets et abstraits ont disparu. La mention des unités de grandeurs n'a plus sa place dans les écritures d'égalités. Les nombres naturels sont étudiés pour eux-mêmes, indépendamment des grandeurs. Le cas n'est pas aussi tranché pour les nombres décimaux. Les décimaux désignent des grandeurs mesurables. L'addition de décimaux est traitée comme une addition d'entiers, après changement convenable d'unités du système de numération. En revanche, la multiplication et la division sont traitées de manière formelle.

[25] L'explication est correcte du point de vue du calcul des grandeurs, mais est-elle accessible aux élèves de ce niveau ?

[26] Nous ne retenons ici que ce qui concerne les décimaux. D'autres innovations importantes ont été introduites, non pas dans les programmes eux-mêmes mais dans les commentaires qui les ont accompagnés.

[27] Voir PROST, op. cit.

[28] Quatorze pages sont consacrées aux opérateurs, trois pages aux décimaux.

Les fractions sont associées à des opérateurs multiplicatifs (composition d'un opérateur à multiplier suivi d'un opérateur à diviser).

Les problèmes peuvent être reliés à la vie courante, mais ce n'est pas obligé. Il est recommandé de traiter des thèmes qui restent à la portée des enfants.

Illustrons le souci algébrique.

> **Commentaires du programme (1970)**
>
> (...) Multiplication et division par 10, 100, 1 000
>
> D'après les propriétés de la numération et de la multiplication :
> 0,2 x 10 = 2   2 : 10 = 0,2
> 43,21 x 10 = 432,1   432,1 : 10 = 43,21
> 0,062 x 100 = 6,2   6,2 : 100 = 0,062 (...)
>
> Un changement d'unité ramène [la multiplication de deux nombres décimaux] à la multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. (...)
>
> Les notions de division exacte et de quotient exact définies pour les nombres naturels a et b s'étendent aux nombres décimaux :
> a et b étant entiers ou décimaux, le quotient exact de a par b, s'il existe, est le nombre entier ou décimal dont le produit par b est égal à a. Si on représente ce quotient exact par r, on a :
> r x b = a   ou   b x r = a   ou a : b = r
>
> Si b est un nombre naturel, la recherche du quotient exact se justifie en utilisant la propriété suivante que l'on vérifiera sur des exemples numériques : Si l'on multiplie l'un des facteurs par 10, 100, 1000, ... le produit est multiplié par 10, 100, 1000,...
> Le cas où b est un nombre décimal se ramène au cas précédent.
>
> On se limitera dans les exercices à des nombres simples. Il conviendra de remarquer que le quotient exact tel qu'il a été défini n'existe pas toujours.(...)
> Le sens des expressions quotient à 1 ; 0,1 ; 0,01 près pourra être précisé à l'occasion d'exercices.

Les changements apportés par rapport aux programmes et instructions antérieurs sont ici légitimés essentiellement par les propriétés algébriques des opérations associées. Le monde des nombres commence à exister pour lui-même. Il n'y a plus de liste de problèmes liés à la vie courante. Est-ce parce qu'ils font partie des habitudes enseignantes et qu'il n'est plus nécessaire de les mentionner, ou est-ce que l'orientation "mathématique" des commentaires annonce une rupture avec les pratiques des problèmes liés au "calcul arithmétique" ?

2.5- 1980 : extension "tempérée" des ensembles de nombres

La vague suivante de changements de programme démarre en 1977 au cours préparatoire et atteint le cours moyen en 1980.

Les textes officiels sont rédigés en termes d'objectifs accompagnés d'instructions. La pédagogie des situations-problèmes fait l'objet d'un long développement, autant dans les "Objectifs" que dans les "Instructions pédagogiques" : elles peuvent être utilisées pour approcher et construire de nouveaux outils mathématiques, ou fournir des occasions aux élèves de réinvestir des acquis antérieurs, ou leur permettre de mettre en œuvre leur pouvoir créatif et argumentatif.

La partie "Objectifs" comporte plus de la moitié des pages consacrées aux décimaux, et les "Instructions pédagogiques" en comportent six pages sur quatorze.

Les nombres décimaux sont maintenant considérés comme de nouveaux nombres, qui n'ont pas les mêmes propriétés que les entiers, en particulier en ce qui concerne l'ordre. Ce dernier est associé à la représentation géométrique d'une "ligne", sans que soit mentionnée l'étude de la proportionnalité entre distances géométriques et écarts entre les nombres. Les décimaux permettent d'approcher d'aussi près qu'on le veut des nombres non décimaux.

Les problèmes qui sont suggérés pour introduire les décimaux n'utilisent pas le contexte des grandeurs : on parle de "partager 8 en 5, 3 en 1" (contexte numérique), du milieu entre le "point 102" et le "point 103" (contexte numérique et géométrique) ; on parle d'étendre les fonctions "diviser par 10, 100, 1000" à de nouveaux nombres. En revanche, les textes recommandent d'introduire la multiplication et la division de décimaux en s'appuyant sur la recherche de problèmes de la vie courante, alors que ces opérations étaient présentées en 1970 comme le résultat d'observations à caractère formel sur les égalités.

Les instructions se réfèrent à plusieurs endroits aux usages sociaux des nombres décimaux [29].

Les fonctions numériques remplacent les opérateurs des textes de 1970. Aucun commentaire n'est fait sur l'abandon des fractions comme opérateurs. Ne subsistent que les fonctions numériques de base (ajouter, retrancher, multiplier, diviser) sans étude de leur composition. La résolution de problèmes de proportionnalité ne nécessite plus la composition d'opérateurs, le recours aux propriétés des tableaux de proportionnalité étant jugé suffisant pour traiter les problèmes "résolus autrefois par la règle de trois" [30].

Les fractions deviennent un thème d'importance mineure : elles expriment des mesures usuelles de grandeurs ou des rapports partie/tout dans des cas numériquement simples. Les fractions décimales réapparaissent.

Notons, pour la première fois dans des textes officiels, le souci de continuité avec l'enseignement de collège, à propos de la division de deux décimaux.

Illustrons le contraste entre le caractère formel des recommandations pédagogiques pour l'ordre, l'addition et la soustraction des décimaux, et la liaison avec les grandeurs familières pour la multiplication et la division.

Instructions pédagogiques (1980)

3.3- Comparer les nombres décimaux
L'un des aspects le plus neuf et le plus important de cet ensemble de nombres est la façon dont il est ordonné.
Entre deux nombres décimaux, il y en a toujours une infinité d'autres. Les réflexes acquis à propos des nombres naturels ne conviennent plus(...). Un travail approfondi doit donc être fait sur l'ordre de grandeur des nombres décimaux. Ainsi :
7,013 est entre 7,01 et 7,02 ;
entre 7 et 7,1, mais beaucoup plus près de 7 ;
un tout petit peu plus grand que 7.
7,3 est entre 7 et 7 et demi, plus près de 7,5 que de 7.

29 Instructions, paragraphes 3.1.1.4 et 3.1.4., 3.4, 5.1.
30 Instructions, paragraphe 5.3.2.

Ces commentaires peuvent s'accompagner d'une représentation par les points d'une droite graduée où des graduations de plus en plus fines permettent de localiser des nombres très divers. Pour intercaler des nombres entre *7,05* et *7,06* par exemple, les enfants doivent passer sur une graduation plus fine, ce qui se traduit par un allongement des écritures. (...)

4.1.1.- Addition, multiplication, soustraction des nombres naturels ou décimaux.
(...) L'étude de la multiplication de deux nombres décimaux débutera par la recherche de situations où, *a* et *b* étant décimaux, l'expression *a x b* ait une signification (la vie courante, les achats de matériaux divers en fournissent à volonté). Ce travail précédera dans tous les cas l'étude du prolongement de la technique de la multiplication qui en est directement dépendante et ne doit surtout pas se limiter à la mise en place d'un mécanisme aveugle. (...)

4.1.2.2.- Prolongement à D de la division
Ce prolongement suppose différentes étapes.
L'une d'elles consiste à obtenir un quotient décimal dans la division de deux entiers naturels. Nombreuses sont les situations qui requièrent un résultat de cette nature et à partir desquelles engager la recherche de procédures appropriées. Il doit s'agir essentiellement de prolongements - qui doivent être justifiés - de techniques antérieurement maîtrisées.

La division de deux nombres décimaux ne fera pas l'objet d'un travail systématique au cycle moyen. Cependant dans des situations où elle est rendue nécessaire, il sera demandé aux élèves de tenter de construire et de justifier des procédures conduisant à l'obtention d'un résultat. Une activité préalable, consiste (...) en la recherche de couples dividende-diviseur conduisant au même quotient. Par exemple, *les quotients de 12 par 5, de 24 par 10, de 36 par 15, de 3,6 par 1,5 sont égaux.*

5.1.- De nombreuses situations rencontrées en classe ou hors de la classe, et en particulier au cours des activités d'éveil, conduisent à constater et à expliciter une correspondance entre deux ensembles de données numériques (par exemple : a*chat d'articles à l'unité, à la longueur, au poids, etc. ; masse et volume ; compteur de pompe à essence ; tarif d'une course en taxi ; affranchissement postal, etc.*).

Les changements apportés par rapport aux programmes et instructions antérieurs présentent une double légitimation : extension des ensembles de nombres, mais aussi résolution de problèmes liés à des grandeurs familières. La demi-droite numérique apparaît comme moyen d'illustrer l'intercalation des nombres décimaux, intercalation qui va contre les "réflexes acquis" par les élèves sur les entiers.

2.6- 1985 : textes très courts

A partir des textes officiels de 1985, les sources officielles sont beaucoup moins abondantes, car il n'y a plus l'équivalent des commentaires ou instructions qui accompagnaient le libellé des contenus de programme. Néanmoins, nous pouvons examiner les ruptures ou glissements d'un texte au suivant. Notons tout d'abord dans les textes officiels de 1985 le maintien du rôle des problèmes comme point de départ d'apprentissages. Les verbes à l'infinitif sont, le plus souvent, remplacés par le nom correspondant (*Écrire* devient *écriture* ...)

Pour le cours moyen, les contenus des programmes concernant les décimaux sont très proches des textes d'objectifs de 1980. Toutefois, la mention de la droite numérique pour représenter l'ordre des décimaux a disparu et la règle de trois est revenue.

2.7- 1991 : compétences de fin de cycle

La scolarisation des enfants de moins de six ans s'est considérablement développée. En 1990-91, 99,0 % des enfants de trois ans sont inscrits à l'école maternelle [31]. La loi d'orientation sur l'éducation de 1989 organise la scolarité en trois cycles, depuis la petite section de l'école maternelle jusqu'à la fin de l'école primaire, modifiant ainsi la structuration ancienne en cours préparatoire, cours élémentaire et cours moyen. Le souci est celui d'assurer un enseignement adapté à la diversité des élèves [32].

De nouveaux textes, publiés en 1991, définissent les "Compétences à acquérir au cours de chaque cycle". Au cycle 3, figurent tout d'abord les compétences générales de résolution de problèmes.

> Les compétences plus spécifiques définies ci-après se construisent et s'évaluent, de préférence, au cours d'activités de résolution de problèmes.

Concernant les décimaux, les objectifs sont présentés avec plus de détails que les programmes du cours moyen de 1985 : la rubrique "Connaissance des nombres" s'allonge. On note également le report de la majorité des problèmes à la fin du paragraphe "Calcul", alors que le texte de 1985 mentionnait l'existence de problèmes associés au sein des alinéas décrivant des propriétés numériques.

La répartition entre école primaire et collège est mentionnée. Le quotient de deux décimaux est à traiter au collège, les moyennes, vitesses moyennes, échelles, pourcentages... ne peuvent faire l'objet à l'école primaire que d'une "première approche" sans technicité. D'ailleurs, les situations de proportionnalité pourront être traitées avec différents moyens, qui sont énumérés (graphiques, tableaux de nombres, propriété de linéarité, éventuellement règle de trois...).

Les fractions sont limitées aux fractions usuelles (demi, tiers, quart, fractions décimales).

La calculatrice apparaît (baptisée "calculette").

La disparition de la demi-droite numérique est confirmée [33].

Illustrons quelques connaissances précises qui sont réclamées des élèves.

> **Connaissance des nombres**
> L'élève saura nommer, écrire des nombres entiers ou décimaux, passer d'une écriture à une autre, en particulier : (...)
> . employer quelques écritures fractionnaires usuelles (demi, tiers, quart, fractions décimales),
> . connaître la signification de chacun des chiffres composant un nombre à virgule,
> . passer, pour un nombre décimal, d'une écriture à virgule à une écriture fractionnaire décimale (et réciproquement). (...)
>
> **Calcul**
> L'élève sera apte à calculer sur les nombres ; pour cela il devra :
> (...) savoir multiplier un décimal par 10/ 100/ 1000, multiplier le cas échéant un nombre entier ou décimal par 0,1/ 0,01, ...

[31] Direction de l'Évaluation et de la Prospective (1992), Scénarios de développement du système éducatif 1991-2000, *Éducation et formations, n° spécial juin 1992,* Paris: Ministère de l'Éducation Nationale.

[32] *Les cycles à l'école primaire* (1991), Paris: CNDP/Hachette, p. 4.

[33] Elle est maintenue au cycle 2.

Les changements apportés par rapport aux programmes antérieurs sont ici légitimés par le souci d'une meilleure liaison avec le collège. Il est licite, maintenant, d'utiliser des moyens variés pour répondre à une question de proportionnalité. L'extension des exigences numériques et l'introduction de la calculatrice ne font pas l'objet de commentaires.

2.8- 1995 : allégements ou augmentations ?

Les programmes de 1995 sont très proches des compétences de fin de cycle parus en 1991. Le préambule consacré aux mathématiques mentionne la préoccupation de la liaison avec le collège.

Les exigences ont diminué pour les décimaux : la multiplication de deux décimaux est retirée des programmes de l'école primaire [34].

Pour la proportionnalité, ce qui était considéré comme difficile en 1991 est déclaré simple : échelles, pourcentages[35]. Il s'agit toujours d'en faire une "première approche".

L'usage de la calculatrice est à faire "dans les situations où (il) s'avère pertinent", ce que l'on peut interpréter comme une mise en garde contre le recours à la calculatrice "en toute occasion". Très probablement le souci est de maintenir les techniques écrites usuelles à la main.

Les exigences sont renforcées du côté des fractions simples : il faut traiter maintenant leur écriture et leur comparaison dans le cas de fractions de même dénominateur. A quel type de problèmes peut-on attacher l'écriture d'une fraction, la comparaison de fractions de même dénominateur ? Il n'y a pas de commentaires à ce sujet. Comme la comparaison est citée alors que l'addition de fractions de même dénominateur ne l'est pas, on peut supposer que le sens est celui des "fractions de grandeurs" d'autrefois.

Les changements par rapport aux programmes antérieurs trouvent leur légitimité dans la liaison avec le collège.

2.9- Stabilité et variations, de 1923 à 1995

Sur la période de près de trois quarts de siècle que nous avons étudiée, certaines évolutions semblent irréversibles, d'autres plus instables.

Rappelons que nous ne disposons pas d'instructions pédagogiques ou de commentaires à partir de 1985.

Le premier sens des décimaux était rattaché aux grandeurs familières. La séparation entre nombres et grandeurs est faite en 1970. Les grandeurs ne sont plus citées aujourd'hui dans les chapitres "nombres" et "calcul". Sans doute peut-on considérer qu'elles figurent implicitement sous les expressions du genre : "problèmes relevant de l'addition, de la soustraction, de la multiplication, de la division".

Les décimaux constituent à partir de 1980 un ensemble de nombres qui a des propriétés différentes de celui des entiers, en particulier pour ce qui concerne l'ordre. Les exigences calculatoires formelles sont nombreuses aujourd'hui. Les allusions les plus explicites à la construction de l'ensemble des décimaux par extension des entiers se trouvent dans les textes de 1980. Ce sont aussi

34 Elle est inscrite dans les programmes officiels de sixième (1995).

35 Ce point mériterait d'être discuté : Levain (1994) a montré que, pour un thème donné, le type d'information, la place de l'inconnue et les valeurs numériques choisies ont de grandes répercussions sur les réussites des élèves.

les seuls qui citent les décimaux comme moyens d'approcher d'aussi près que l'on veut les solutions non décimales d'un problème donné [36].

Les expressions "calcul approché", ou "encadrement" figurent dans tous les programmes, dans une rubrique qui les associe à l'ordre de grandeur. Ce qui est visé nous semble être le calcul "en gros", sur des nombres "faciles". Aucun programme, sauf celui de 1980, ne fait allusion à une mesure d'écart entre les "vrais nombres" et les nombres calculés de manière approchée.

Les fractions décimales sont l'objet quasi constant d'exercices de conversion décimal <----> fraction décimale : l'exception concerne la période 1970-1980.

Les fractions ordinaires sont celles qui ont subi le plus de variations. En 1923, elles sont situées après les fractions décimales et on fait à leur propos les "quatre opérations". En 1945, ce sont des fractions de grandeurs qu'on peut calculer (et "problème inverse"). On les additionne, les compare et les soustrait. En 1970, ce sont des opérateurs multiplicatifs, dont on fait uniquement le produit. En 1980, ce sont des fractions de grandeurs dans des situations familières. Elles constituent aussi un des moyens suggérés pour répondre à l'insuffisance des entiers, un des marchepieds vers les décimaux. En 1985, ne sont mentionnées que les fractions simples, sans indication d'opérations. En 1991, les seules fractions ordinaires citées sont le demi, le tiers et le quart. En 1995, les fractions simples sont de nouveaux nombres rendus nécessaires dans certaines situations, situations elles-mêmes non explicitées. On compare les fractions de même dénominateur.

La demi-droite numérique est apparue en 1980, puis a disparu en 1985. Rien n'est dit sur les graduations des axes des graphiques, dont la constitution et la lecture mettent pourtant en jeu la proportionnalité entre distance géométrique et écart entre les nombres.

La calculatrice est d'apparition récente (1991), son emploi s'ajoute aux techniques opératoires (au sens de techniques de calcul "à la main"). Les territoires respectifs ne sont pas mentionnés.

Ce survol des programmes officiels de l'enseignement primaire montre la profonde évolution des rédactions. Les décimaux ne sont plus associés aux grandeurs familières : ce sont les aspects formels qui priment aujourd'hui. La légitimité des changements a évolué. C'est la continuité avec le collège qui est affirmée maintenant.

3. Les textes officiels du secondaire

Nous allons maintenant étudier les textes officiels du secondaire sur la même période, avec la même méthode. Nous ne prendrons pas pour point de départ les textes de 1902 : en effet, ces textes organisent l'enseignement secondaire en deux cycles, avec deux filières, classique et moderne. La filière moderne a en mathématiques des horaires plus élevés et des contenus plus chargés que la filière classique. Nous avons préféré prendre comme premier repère la réforme de 1923 qui supprime la dualité moderne-classique et impose le même enseignement scientifique jusqu'en première, au nom de l'égalité scientifique qui permet de préparer les élèves à toutes les "voies intellectuelles où se déploient

36 Cette périphrase indique le caractère dense des décimaux dans l'ensemble des réels.

les activités des hommes"[37]. C'est à partir de ce point d'unification que nous analyserons les modifications de textes officiels concernant les rationnels, les décimaux et la proportionnalité.

Dans les premières périodes, nous évoquerons la répartition des contenus sur les quatre années, de la sixième à la troisième. Puis, avec l'unification progressive du système de l'enseignement secondaire et la suppression de l'enseignement primaire supérieur, nous nous bornerons à présenter les contenus mathématiques des classes de sixième et cinquième.

3.1- 1923 : fusion des filières modernes et classiques dans l'enseignement secondaire

Avant la réforme de 1923, les programmes de mathématiques étaient beaucoup plus développés dans l'enseignement moderne que dans l'enseignement classique. La fusion oblige à des changements importants dans les horaires et les contenus.

Un premier élément frappant est l'étalement des apprentissages concernant les thèmes des rationnels, décimaux et proportionnalité sur quatre années. Citons par exemple : fractions de grandeurs et décimaux en sixième, règle de trois, intérêt simple, escompte en cinquième, grandeurs directement ou inversement proportionnelles, extraction de la racine carrée en quatrième, rapports de grandeurs, partage d'un segment dans un rapport donné, construction géométrique de la quatrième proportionnelle et de la moyenne proportionnelle en troisième.

Les instructions relatives à l'enseignement des mathématiques recommandent de lier l'étude des fractions aux "grandeurs mesurables familières aux enfants". Les fractions sont considérées comme un "multiplicateur abstrait" d'une grandeur. C'est la référence aux grandeurs qui permet de définir l'addition et la multiplication. Les fractions décimales permettent de "reprendre les opérations sur les nombres décimaux" et ce sans difficulté pour l'addition, la soustraction et la multiplication. Les décimaux sont traités en liaison avec le système métrique. Dans la division exacte de décimaux, le quotient "se présente sous forme de fraction ordinaire". Le passage inverse, des fractions ordinaires aux nombres décimaux, est considéré comme prématuré, sauf à le traiter sur des exemples.

> La division exacte de deux nombres décimaux acquiert son véritable caractère et le quotient se présente sous forme de fraction ordinaire. Deux problèmes se posent à cette occasion, reconnaître s'il existe un nombre décimal égal à une fraction ordinaire donnée, trouver les nombres décimaux approchés d'une fraction donnée à moins d'une unité décimale d'un ordre donné. L'étude complète du premier est prématurée, et tout au plus, peut-on se borner à des exemples. Le second est déjà traité dans le cas particulier du quotient approché à 1 près ; l'intérêt en apparaît mieux à propos des applications du système métrique.

En cinquième, la règle de trois peut être simplifiée par l'emploi de "fractions de grandeurs résultat d'une proportionnalité de grandeurs associées".

En quatrième, les auteurs des instructions s'interrogent sur la possibilité que les élèves accèdent au théorème fondamental sur les parties aliquotes communes.

---

37 Cette partie doit beaucoup au manuscrit préparé par BELHOSTE, B., *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, Textes présentés et annotés.*, tome 2 (à paraître), Paris: INRP/Economica.

Le programme de troisième détache les fractions des grandeurs, dans une perspective de calcul algébrique.

> (...) C'est à ce niveau que la forme abstraite des propositions relatives aux nombres, indépendamment des grandeurs qu'ils mesurent, doit être précisée et fixée dans la mémoire des élèves. Il faudra insister sur le passage de la proportionnalité des grandeurs aux proportions arithmétiques et vice versa : un retour constant aux propriétés des fractions sera nécessaire. On préparera ainsi le premier contact avec l'algèbre.

On observe ainsi plusieurs types d'arguments pour assurer la légitimité de ces programmes :
- les connaissances pratiques sur les grandeurs mesurables familières aux enfants, en liaison avec le système métrique,
- les savoirs mathématiques sur l'existence d'une suite décimale illimitée permettant de représenter toute fraction ordinaire,
- les possibilités que les élèves de ce niveau accèdent à des théorèmes fondamentaux des mathématiques.

3.2- 1937 et 1938 : programmes uniques pour le primaire supérieur et le secondaire

L'arrêté du 30 août 1937 aligne les programmes des enseignements des classes de sixième, des années préparatoires aux écoles primaires supérieures, des cours supérieurs des écoles primaires.

Une première série de textes est publiée en 1937 : programmes et instructions pour les classes de sixième et année préparatoire. Un alignement similaire est pratiqué sur les enseignements de cinquième, quatrième et troisième et ceux des trois années d'école primaire supérieure en 1938. Les horaires des filières secondaires sont augmentés par rapport à la période antérieure. Cette réforme du Ministre Jean Zay est interrompue par la guerre, mais on peut y voir le point de départ d'une unification qui s'achèvera avec le collège "Haby" en 1975.

La répartition des contenus entre sixième (et année préparatoire) et cinquième (et première année des écoles primaires supérieures) est modifiée par rapport au programme antérieur.

En sixième l'arithmétique est "appliquée". Des révisions sont à faire sur les nombres entiers et décimaux, en liaison avec la mesure de grandeurs. Poids spécifique, volume spécifique, prix unitaire, pourcentages, intérêts simples, escompte et rentes passent en sixième.

En cinquième, des révisions du programme de l'enseignement primaire élémentaire permettent de reprendre l'étude du quotient de deux nombres entiers ou décimaux à une approximation décimale donnée, les fractions de grandeurs et les opérations sur les fractions "à partir de problèmes concrets". Des problèmes "simples" permettent d'introduire les équations du premier degré à une inconnue (désignée par une lettre).

Les programmes de quatrième sont augmentés du traitement des "équations numériques du premier degré" et des "systèmes de deux équations numériques du premier degré" (avec graphiques associés). En troisième, figurent les problèmes empruntés à la géométrie et à la physique conduisant à des relations de la forme $y = x^2$, $y = ax^2$, $y = 1/x$, $y = a/x$, où a est un coefficient numérique [38].

[38] Dans le texte, le trait de fraction est horizontal et non oblique.

Les instructions du 30 septembre 1938 accordent beaucoup d'importance à l'emploi du système métrique, aux procédés courants de mesure des grandeurs usuelles et au calcul des opérations sur les nombres décimaux qui résultent de ces mesures. C'est un préalable aux démonstrations ou aux "études de problèmes abstraits qui, commencées trop tôt, risqueraient de dépasser leur intelligence". Le souci premier est "l'application concrète et immédiate". Les exercices seront vraisemblables, c'est-à-dire "susceptibles d'être rencontrés dans la vie courante". Les données numériques "seront des nombres simples et on évitera de dépasser deux ou trois chiffres caractéristiques". Les mesures de grandeurs et les exercices d'application "comporteront des vérifications expérimentales de lois simples déjà connues des élèves et plus ou moins justifiées par des raisonnements".

Dans les classes de quatrième et deuxième année d'enseignement primaire supérieur, troisième et troisième année d'enseignement primaire supérieur, l'étude des approximations est liée à celle de "grandeurs expérimentales", en particulier au moment de la construction ou de l'interprétation des graphiques.

> Il importe que des nombres dont les écarts peuvent résulter d'<u>incertitudes</u> (ou d'<u>erreurs</u>) de mesures ou d'expérience soient représentés par des points sensiblement confondus.

En cinquième, les instructions estiment qu'il est possible "d'esquisser modestement une théorie" de la numération décimale. Le nombre décimal peut être considéré soit comme un entier, soit comme une somme de deux mesures, ce qui justifie les règles d'addition et de soustraction. La représentation des nombres décimaux par les points d'une demi-droite "facilite leur comparaison". Pour la division, le texte oppose les points de vue théorique et pratique.

> La division d'un dividende D par un diviseur <u>d</u> est, théoriquement, le problème inverse de la multiplication, c'est-à-dire la résolution de l'équation en <u>x</u>
> D = <u>d</u> x <u>x</u>
>
> Pratiquement, on recherche une solution approchée qui est : le <u>quotient entier</u> (ou à une unité près) ; ou le <u>quotient avec un, deux ...., chiffres</u> décimaux exacts (à un dixième, un centième..., près).

Les instructions de 1938 proposent d'introduire l'écriture fractionnaire à partir des problèmes de recherche de "valeur de l'unité" ou de "valeur spécifique". Les quotients sont associés à la proportionnalité entre deux grandeurs : le quotient ou valeur à l'unité est le coefficient de proportionnalité, expressions qui trouveront leur sens en classes de quatrième et troisième, deuxième et troisième années, "avec l'étude des fonctions linéaires, monôme et binôme du premier degré". La valeur spécifique doit être mentionnée avec ses deux unités. La règle de trois sera traitée en donnant du sens aux calculs intermédiaires de quotient (ou exceptionnellement de produit).

L'étude des fractions de grandeurs trouve son débouché en quatrième par l'étude des rationnels. Le traitement de leurs propriétés mathématiques répond aux nécessités de préparer le calcul algébrique.

> Dans cet ensemble, l'addition et la multiplication sont commutatives et associatives, et la multiplication est distributive par rapport à l'addition. Les opérations

inverses, soustraction et division, sont possibles (sauf pour un diviseur nul) et donnent un résultat unique. Ces considérations serviront à justifier les règles du calcul algébrique en montrant que deux expressions (monômes ou polynômes) identiques ont les mêmes valeurs numériques, pour les mêmes valeurs des lettres.

Les changements par rapport aux programmes antérieurs trouvent leur légitimité dans la progressivité, des connaissances pratiques vers le calcul algébrique. Les préoccupations de raisonnement ne sont pas absentes, mais elles doivent venir à leur heure.

3.3- 1947 : retouches

L'enseignement secondaire est divisé en deux branches principales : d'une part l'enseignement long, délivré dans les lycées classiques et modernes, d'autre part l'enseignement court, moderne, délivré dans les cours complémentaires .

Les programmes de sixième et cinquième sont les mêmes pour les deux branches. En revanche, pour les classes de quatrième d'enseignement long (classique ou moderne) et de quatrième à enseignement court, les rédactions diffèrent. Dans l'enseignement court (trois heures hebdomadaires), la rédaction reprend des paragraphes entiers des programmes de cinquième et quatrième de la réforme 1937-38. Un changement analogue est apporté aux enseignements de troisième classique et moderne (enseignement long) et troisième moderne (enseignement court).

L'enseignement long de même niveau (deux heures et demie hebdomadaires) a un libellé plus réduit que celui de la filière courte, et les exemples sont internes aux mathématiques.

Nous n'analyserons pas les textes de quatrième et troisième.

En sixième, la seule modification porte sur la suppression de l'escompte et des rentes. En cinquième, l'ordre n'est plus décimaux puis fractions, mais fractions puis décimaux. L'introduction de l'équation du premier degré à une inconnue passe en quatrième. Dans les instructions générales sur l'enseignement des mathématiques [39], l'interversion entre fractions et décimaux par rapport aux programmes antérieurs est faite sans commentaire justificatif.

3.4- 1960 : vers les collèges d'enseignement secondaire

La réforme de 1959 prolonge la scolarité obligatoire jusqu'à 16 ans. Les cours complémentaires sont transformés en collèges d'enseignement général (CEG) en 1960 : ces établissements appliquent des programmes de mathématiques semblables à ceux des lycées.

Après un débat sur la place du cycle d'observation (sixième et cinquième), le type d'enseignants qui doit y être rattaché (instituteurs ou professeurs du second degré), sont créés en 1963 les collèges d'enseignement secondaire, qui regroupent sous le même toit les différentes filières : d'une part les filières "normales" (I et II) , d'autre part les classes "de transition" et classes "pratiques" (filière III) . La réforme de l'enseignement technique suivra en 1966 par la création des BEP en deux ans.[40]

39 Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, *Bulletin n° 118 bis*, avril 1947. D'après ce bulletin, le texte lui-même date d'octobre 1946.

40 Voir PROST, op. cit. et également, LEGRAND, L. (1977), *Pour une politique démocratique de l'éducation,* Paris: PUF.

Les programmes de sixième et cinquième sont remodelés, de manière plus marquée en sixième qu'en cinquième.

En sixième, la géométrie, les mesures de grandeurs et calculs correspondants sont mis au premier plan : "mesure expérimentale des nombres mesurant un arc", notion d'échelle ou de plan introduite "à l'occasion d'exercices de représentation de figures ou d'objets", "exercices pratiques d'arithmétique" consistant à construire des "tables de valeurs numériques, de tables de correspondance entre les mesures de deux grandeurs liées, de calculs faits à partir d'une formule littérale dans laquelle on donne aux lettres diverses valeurs numériques".

Il n'y a plus de paragraphe spécifique sur les nombres. Les nombres sont liés à des grandeurs : segments, angles, durées ("temps"), aires, volumes. Les multiples et sous-multiples d'un segment remplacent les rapports de segments, inscrits au programme de quatrième en 1934. Fractions et décimaux ne sont pas mentionnés, mais ils doivent être probablement connus puisque les programmes comportent explicitement les formules des volumes de la pyramide, du cône de révolution et de la sphère.

Le volume spécifique a disparu ainsi que le thème des monnaies. On peut considérer ces deux thèmes comme inclus implicitement dans les "exercices pratiques" cités à propos des travaux pratiques. La proportionnalité n'est pas nommée mais elle est implicite dans les thèmes de mouvements uniformes, vitesse, poids spécifique.

En cinquième, le programme ressemble à celui de la période antérieure. La partie consacrée aux "nombres fractionnaires" s'est beaucoup étoffée. On passe des fractions de grandeurs (segments, angles, arcs d'un même cercle..) à la simplification, à la réduction au même dénominateur. Après les opérations sur les fractions et l'étude du quotient exact, viennent les fractions décimales, puis les nombres décimaux. La perspective est d'introduire progressivement les lettres ("arithmétique littérale"). Les commentaires qui accompagnent les contenus de cinquième insistent sur le rôle de l'arithmétique pour construire progressivement les nombres et découvrir leurs propriétés : "c'est sur cette base que s'édifiera, un peu plus tard, l'algèbre".

Une note préliminaire sur les programmes de mathématiques des classes de sixième et cinquième parue au bulletin officiel du 25 juillet 1960 insiste sur la continuité des enseignements, du cours moyen à la classe de cinquième. Les mécanismes de calcul devront être soigneusement entretenus, mais avec nuances pour la règle de trois : son automatisme pourra être "fructueusement brisé par le recours à des suites de nombres proportionnels ou à la notion de pourcentage", ce qui fournira le premier exemple de correspondance entre les éléments de deux ensembles, elle-même plus générale que la proportionnalité.

La même note préliminaire commente l'intérêt des "travaux pratiques", devenus obligatoires : celui de faciliter le passage à l'abstraction en sixième et cinquième. La démonstration est le point culminant du processus d'abstraction. C'est la méthode même qu'emploient de "nombreux mathématiciens", et cette méthode est particulièrement efficace pour ceux à qui toute voie scientifique serait fermée. Pour toute une catégorie d'enfants, le "raisonnement expérimental" est indispensable.

Le succès sera atteint lorsque l'élève, ayant pris conscience de la différence qui sépare une vérification expérimentale, même recommencée cent fois, d'une démonstration, en viendra à ne pas se contenter de la première et à exiger la seconde. (...)

Il est clair (...) que tous les enfants ont intérêt à cultiver leur sens du réel, leur adresse, leur imagination. Certains verront se développer leur esprit d'analyse, d'autres leur esprit déductif, d'autres encore leur intuition. Toute une catégorie d'enfants qui ne pourront franchir le pont qui les conduirait jusque dans le domaine de l'abstraction retireront de leurs efforts le sens du "raisonnement expérimental", raisonnement non cartésien peut-être fruit de l'intuition étayée par un solide empirisme, indispensable à qui veut diriger des techniciens.

On observe ainsi plusieurs types d'arguments pour assurer la légitimité de ces programmes :
- les nombres servent à mesurer des grandeurs,
- les fractions et l'arithmétique littérale préparent l'algèbre,
- l'approche expérimentale est un chemin vers l'abstraction,
- les élèves ne pourront pas tous accéder à l'abstraction (liée à la démonstration), mais beaucoup pourront tirer profit du "raisonnement expérimental".

3.5- 1968 et années suivantes : "mathématiques modernes"

La réforme des mathématiques modernes a été précédée par le travail de la commission "Lichnérowicz" créée en septembre 1966 [41]. Les auteurs des programmes reconnaissent les ruptures que représentent les nouveaux textes, qui ont fait l'objet d'expérimentations préalables [42]. Il s'agit de permettre au plus grand nombre d'élèves d'avoir accès aux mathématiques dans la continuité avec l'école primaire devenue l'étape qui précède l'enseignement secondaire.

Les textes sont applicables aux filières I et II, les classes de transition et les classes pratiques conservant les programmes antérieurs. Les nouveaux programmes comportent une dimension ensembliste plus importante que ne le laisseraient croire les extraits que nous présentons ci-après.

La structure du programme de sixième a changé : après un paragraphe consacré aux relations, vient un paragraphe spécifique sur les nombres entiers et décimaux, puis l'étude des objets géométriques et physiques, enfin celle des nombres relatifs (somme et différence). On peut reconnaître toutefois une continuité avec la période précédente à propos de la partie "étude d'objets géométriques et physiques donnant lieu à mesures".

Le programme de cinquième est très développé dans sa partie numérique. Le thème de la proportionnalité disparaît. Seule la partie arithmétique présente quelques similitudes avec les textes officiels antérieurs. L'étude des nombres relatifs s'enrichit avec le produit par un nombre naturel, l'ordre, la valeur absolue, l'opposé. Les fractions disparaissent au profit des décimaux (addition, ordre, produit par un relatif). Certaines expressions comme "ordre et addition", "ordre et multiplication", apparaissent pour la première fois dans un libellé de programme.

41 Pour une étude détaillée, voir LEGRAND L., op. cit., chapitre VII.

42 Instructions du 28 février 1969.

Les décimaux sont donc supposés connus depuis l'école élémentaire : il suffit, en sixième, d'entretenir chez les élèves la pratique des opérations et les circonstances de leur emploi. Les fractions décimales ne sont plus nécessaires car les opérations sur les nombres décimaux peuvent être définies indépendamment. Les commentaires du programme donnent l'exemple de la multiplication de 1,2 par 2,35 : il suffit de rechercher le nombre de carrés de 1 cm de côté, intérieurs à un rectangle dont les côtés mesurent 120 cm et 235 cm. La règle de formation du produit "s'en dégage intuitivement". Le cadre des travaux numériques permet d'habituer progressivement les élèves à "représenter par des lettres des nombres dont l'existence n'est pas à mettre en cause".

La suppression de la division de décimaux résulte des propriétés mathématiques du quotient de deux décimaux.

> La division a été exclue du programme de sixième, parce que le quotient de deux nombres décimaux n'est pas, en général, un nombre décimal ; en cinquième, les élèves apprendront la technique de la division euclidienne d'un nombre naturel par un nombre naturel ; ce n'est qu'en quatrième qu'ils feront connaissance avec les nombres rationnels et qu'ils poseront le problème du quotient de deux nombres décimaux.

En revanche, pour les mesures liées à des objets mathématiques ou physiques (masses volumiques, débits, vitesse, etc.), le point de vue pratique est admis, en continuité avec l'école primaire, puisque les notions physiques correspondantes ne conduisent qu'à la recherche de valeurs approchées.

Les commentaires font état de la difficulté pédagogique de certains thèmes. C'est pour éviter des blocages que l'étude des fractions a été reportée en quatrième, sans interdire l'emploi de quelques fractions usuelles. Pour des raisons semblables, la multiplication de deux décimaux ne figure pas en sixième. Remarquons une contradiction avec ce qui est dit des rappels du cours moyen : on y avait mentionné la possibilité de dégager la "règle de formation du produit" en s'appuyant sur les propriétés de l'aire du rectangle et des changements d'unités.

Les travaux pratiques (sixième et cinquième) sont à faire pour chaque chapitre du programme. Ils servent à présenter une notion, à préciser ou à illustrer une définition, à vérifier un résultat ou une formule, à suggérer quelque problème nouveau et aussi, "montrer, mieux que des mots, que les mathématiques ont une utilité pratique".

La légitimité des changements de programme joue sur plusieurs registres :
- il faut éviter des blocages chez les élèves, dégager intuitivement des règles,
- les problèmes pratiques sont en continuité avec l'école primaire ; ils ne requièrent pas les mêmes exigences que les problèmes internes aux mathématiques.

3.6- 1977 : des inflexions

Au collège, les filières ont disparu : tous les élèves se retrouvent dans les mêmes sixièmes. Les textes officiels (programmes et commentaires d'accompagnement) [43] séparent le bloc de sixième-cinquième du bloc quatrième-troisième. En mathématiques, on précise les connaissances qu'un élève "moyen" devra posséder en fin d'année scolaire.

[43] Arrêté du 17 mars 1977, puis circulaire n°77-157 du 29 avril 1977 parue au Bulletin Officiel n°22 bis, 9/6/77.

La partie numérique comporte deux nouveautés en sixième : les suites finies proportionnelles et la droite numérique. Les suites finies proportionnelles sont associées aux calculs de pourcentages, aux exercices de changements d'unités. Avec la droite "orientée, munie d'une origine et régulièrement graduée", on fera des exercices de repérage de points d'abscisse décimale. Ces deux thèmes ne sont pas repris en cinquième.

Les grandeurs apparaissent implicitement en sixième avec les changements d'unité.

La multiplication de décimaux passe de sixième en cinquième. Durées, vitesse, débits sont passés de sixième en cinquième.

Les problèmes d'échelle prévus antérieurement en travaux pratiques pour les classes de sixième et cinquième) sont maintenant inscrits dans la partie "programme" de la classe de cinquième sous le libellé d' "agrandissement et réduction d'un dessin".

La circulaire sur "le rôle dévolu à l'enseignement des mathématiques dans la formation de l'élève de collège" recommande de prendre comme points de départ des axiomes simples et "naturels", de privilégier les raisonnements courts, tout en reconnaissant que ce n'est pas toujours possible. Dans ce dernier cas, une "appréhension concrète" suffira à l'élève, ainsi que la "maîtrise des mécanismes", comme c'est proposé pour l'approche de l'angle [44]. Les savoirs d'un élève moyen à la fin d'année sont d'ordre calculatoire, pratiques.

> **A la fin de la première année des collèges**
> I.- Très bonne pratique des quatre opérations sur les décimaux positifs.
> Usage des parenthèses.
> Usage pratique de la relation de proportionnalité ; application aux changements d'unités.
>
> II.- Pratique de l'addition et de la soustraction sur les décimaux relatifs. (...)
>
> **A la fin de la seconde année des collèges**
> (...) III.- Sommes, différences, produits de décimaux relatifs, puissances entières d'exposant positif et d'exposant nul.
> L'étude théorique de la relation d'ordre n'est pas au programme, mais les élèves devront savoir comparer deux décimaux relatifs. (...)

La légitimité des changements de programme repose sur le souci d'adaptation aux élèves : bien sûr, il faut initier les élèves au raisonnement mathématique, mais le niveau minimum à atteindre, pour le domaine qui nous intéresse, est d'ordre calculatoire.

3.7- 1985 : faire face à l'hétérogénéité

La nouvelle génération de textes ne résulte plus d'un changement institutionnel, mais de la prise en compte, "sans les consacrer et pour les dépasser", des différences qui existent entre les élèves : différences d'âge, de sexe et d'habitudes, pluralité des origines ethniques, sociales et culturelles, degrés de maturité, niveaux des résultats.

Pour les mathématiques, les documents ministériels [45] précisent ce qu'ils appelaient dans les

---

44 A l'époque, la communauté mathématique s'interrogeait sur les ambiguïtés du mot "angle" et les moyens pédagogiques d'enseigner "proprement" les différents concepts attachés à l'emploi de ce mot.

45 Nous nous référons à la brochure publiée par le Ministère de l'Education Nationale (1993), *Mathématiques, classes des collèges, 6e, 5e, 4e, 3e*, Paris: CNDP.

textes antérieurs le niveau de l'élève moyen : ce sont désormais des "connaissances exigibles", qui correspondent à une partie des tâches de l'enseignant.

> Une distinction claire doit être établie entre :
> - les activités prescrites par les programmes, qui doivent être aussi riches et diversifiées que possible,
> - les connaissances exigibles, qui sont beaucoup plus restreintes que ce qui se fait en classe,
> - les activités complémentaires éventuelles sur tel ou tel point.

Il faut privilégier l'activité de l'élève, faire résoudre des problèmes au moyen "d'outils" (techniques ou notions déjà acquises), ce qui permettra la découverte ou l'assimilation de notions nouvelles, dans un processus récursif.

> (...) les professeurs vont à avoir à choisir des situations créant un problème, dont la solution fera intervenir des "outils", c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci auront été bien maîtrisées, elles fourniront à leur tour des "outils" qui permettront un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente.

Des compléments apportés au programme précisent, dans un texte en deux colonnes, "le sens et les limites des contenus du programme" d'une part, et les "compétences exigibles des élèves" d'autre part [46].

Le libellé des programmes a changé de plan : on aborde successivement les travaux géométriques, les travaux numériques et l'organisation et gestion de données - fonctions.

Pour la partie numérique, les indications sont très détaillées. Les fractions sont réintroduites : quotients de décimaux et écritures fractionnaires de décimaux en sixième, écritures fractionnaires en cinquième.

En sixième, on étudie l'addition, la soustraction et la multiplication d'écritures fractionnaires de décimaux. Les quotients de décimaux sont multipliés par un décimal : on en prend des approximations. Pour la première fois apparaissent les mentions de "troncature et d'arrondi" en liaison avec le calcul approché. On donne des exemples d'équations associées : $23 \times \square = 471{,}5$ ou $2{,}05 / \square = 8{,}2$

En cinquième, les écritures fractionnaires de même dénominateur font l'objet de comparaison et d'addition. On multiplie deux nombres en écriture fractionnaire. Des équations numériques du premier degré sont présentées. L'initiation aux écritures littérales se poursuit, mais le calcul littéral ne figure pas au programme.

En sixième, l'introduction des écritures fractionnaires de décimaux et des quotients de décimaux est justifiée par le souci de préparer l'étude des fractions.

---

46 Les compléments aux programmes ont paru au bulletin officiel spécial n°4 du 30 juillet 1987.

2.3 Quotient de décimaux
Il s'agit ici d'un simple jalon vers un élargissement des opérations. Dans ce paragraphe, on travaille uniquement sur des exemples numériques et au travers de problèmes. Ces travaux dégagent et utilisent les deux idées suivantes :
- le quotient a/b de deux nombres décimaux est un nombre qui multiplié par b donne a,
- on ne change pas le quotient quand on multiple a et b par un même nombre non nul.
La multiplication d'un nombre décimal par un quotient intervient, en particulier, dans des problèmes de proportionnalité.

Les suites proportionnelles ont disparu. Le thème de la proportionnalité est inclus dans la nouvelle rubrique, "Organisation et gestion de données - Fonctions", qui présente en parallèle des travaux à base numérique et à base géométrique. On y retrouve mentionnés les pourcentages d'une valeur, des relevés statistiques, les représentations associées aux fonctions numériques (tableaux, graphiques) et les calculs associés à la proportionnalité (recherche d'une quatrième proportionnelle).

C'est à ce propos qu'est mentionnée pour la première fois la calculatrice : elle comporte des "opérateurs constants" utiles dans les travaux numériques.

En cinquième, le libellé de la partie "Organisation et gestion de données - Fonctions" est très voisin de celui de sixième. Il comporte le calcul d'un pourcentage, d'une vitesse moyenne. Les débits et masse volumique ne sont plus mentionnés. Les compléments indiquent, à propos des activités graphiques, qu'elles conduiront à interpréter l'abscisse d'un point d'une droite graduée en termes de distance et de position par rapport à l'origine (sans recours à la valeur absolue).

Pour ce qui est des travaux numériques, les compléments insistent, autant en sixième qu'en cinquième, sur la liaison entre sens des opérations, équations et résolution de problèmes concrets, dans la continuité avec l'école élémentaire : c'est un moyen de "mieux saisir *le sens des opérations et des équations* figurant au programme" [47].

Les changements intervenus par rapport aux programmes antérieurs sont légitimés de plusieurs manières :
- priorité aux activités, qui doivent développer la capacité des élèves à se poser des problèmes et de progresser vers leur résolution,
- préparation de l'algèbre de la classe de quatrième,
- continuité avec l'école élémentaire pour ce qui est des travaux numériques.

<u>3.8- 1995 : retouches pour la partie numérique</u>

Nous nous limiterons à quelques remarques concernant les programmes de 1995 parus pour la sixième. En effet, ces textes officiels n'étaient pas en vigueur quand le recueil de données a été fait. Ils ne nous serviront que pour confirmer les permanences thématiques des textes officiels antérieurs [48].

---

47 Souligné dans le texte.

48 Nous nous appuyons sur le texte ministériel : Direction des lycées et collèges - Direction de la communication (1995), *Vers le nouveau collège, Programmes de la classe de 6e*, Paris: Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche.

Les objectifs de l'enseignement des mathématiques au collège sont présentés de manière différente de ceux de la période précédente. On distingue les mathématiques comme discipline de formation générale, l'outil mathématique, les mathématiques comme discipline d'expression.

> Les mathématiques comme discipline de formation générale
> Au collège, les mathématiques contribuent, avec d'autres disciplines, à entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. (...)
> A travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique (...).
>
> L'outil mathématique
> Les méthodes mathématiques s'appliquent à la résolution de problèmes courants. Elles ont cependant leur autonomie propre qui leur permet d'intervenir dans des domaines aussi divers que les sciences physiques, les sciences de la vie et de la terre, la technologie, la géographie... (...)
>
> Les mathématiques comme discipline d'expression
> (...) Ainsi que d'autres disciplines, les mathématiques ont en charge l'apprentissage de différentes formes d'expression autres que la langue usuelle (nombres, figures, graphiques, formules, tableaux, schémas).

Les rubriques des programmes antérieurs sont maintenues. Les objectifs en sont précisés.

> Travaux numériques :
> - acquérir les différentes manières d'écrire des nombres (écriture décimale, écriture fractionnaire, radicaux) et les traitements correspondants,
> - se représenter la droite graduée complète, avec son zéro séparant les valeurs positives et négatives, et apprendre à y localiser les nombres rencontrés,
> - assimiler progressivement le langage algébrique et son emploi pour résoudre des problèmes.
>
> Organisation et gestion de données, fonctions :
> - maîtriser différents traitements en rapport avec la proportionnalité,
> - se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aires, volumes, durées) (...).

Les méthodes d'enseignement recommandées sont les mêmes que pour les programmes de la période précédente. Les contenus de la partie numérique sont quasiment identiques aux précédents. En revanche, la présentation en deux colonnes a changé : une colonne concerne les compétences exigibles, très voisines des compétences des programmes antérieurs ; l'autre colonne comporte des commentaires en partie nouveaux.

On recommande de remettre en mémoire les techniques opératoires de l'école primaire pour "ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes". La multiplication des nombres décimaux, qui vient d'être retirée des programmes de l'école élémentaire, est à traiter "tant du point de vue du sens que de la technique". Le quotient de décimaux est reconnu comme un opérateur intervenant dans les situations de proportionnalité. Mais "on visera aussi à lui faire acquérir le statut de nombre au travers de multiples activités : repérage (placement sur une droite graduée), mesure, calcul (possibilité d'utiliser un quotient a/b dans un calcul, sans effectuer nécessairement la division de a par b)".

La droite graduée, dont l'usage en sixième était réservé aux nombres relatifs, est utilisée maintenant pour des nombres donnés "en écriture décimale" : les élèves doivent être capables de lire l'abscisse d'un point ou d'en donner un encadrement et de situer un point d'abscisse donnée.

Les changements qui ont été apportés pour la partie qui nous intéresse reposent sur deux types de légitimité :
- liaison avec l'enseignement de l'école élémentaire,
- préparation des calculs numériques des années ultérieures.

En revanche, la présentation générale insiste, beaucoup plus que par le passé, sur l'utilité, à la fois interne et externe, de l'enseignement mathématique, et sur les langages associés à cette discipline.

3.9- Stabilité et variations, de 1923 à 1995

Sur la période de près de trois quarts de siècle que nous avons étudiée, certains thèmes semblent stables, d'autres semblent évoluer de manière irréversible, d'autres encore semblent osciller.

Sur toute cette période, on considère comme important de maintenir au collège les mécanismes de calcul acquis à l'école élémentaire. Le travail sur décimaux ou fractions ou écritures fractionnaires ou quotients de décimaux est fait pour préparer le calcul littéral : c'est l'algèbre des équations du premier degré que l'on vise à plus long terme. Il faut savoir calculer avec ces nombres, que ce soit au début du premier cycle ou plus tard. Le calcul approché (mental ou écrit) est une technique permettant de contrôler un résultat numérique.

La calculatrice, introduite en 1985, ne change pas la place des techniques opératoires effectuées à la main. Elle permet de gérer plus facilement des données. Le calcul mental ou le calcul approché permet de contrôler l'usage de la calculatrice (1995).

Il est important de savoir mettre en œuvre un savoir numérique à propos de problèmes évoquant des grandeurs familières (liste variable).

Certains théorèmes sont difficiles et il faut parfois savoir rester au niveau des élèves (voire de certains élèves). Il vaut mieux reporter les questions délicates aux classes ultérieures ou en étaler l'étude. Tous les élèves doivent savoir calculer.

La liaison entre nombres et grandeurs est traitée de manière variable. En 1937-38, les décimaux représentent des grandeurs familières, auxquelles il est facile de relier l'addition ou la soustraction. Vitesses, échelles, pourcentages sont toujours mentionnés soit en sixième soit en cinquième. La multiplication et la division de décimaux sont l'objet de traitements pratiques dissociés du traitement mathématique (1937 et 1938, 1968). En 1960, nombres et grandeurs sont intimement associés par le biais des mesures, sans que soit mentionné le type de nombres utilisés. En 1985 et 1995, les travaux numériques font l'objet d'une rubrique spéciale : la liaison avec les grandeurs fait partie de la rubrique "Organisation et gestion de données, fonctions".

La multiplication et la division de décimaux posent un problème d'enseignement : l'approche pratique est partout présente, et les arrondis correspondants semblent faciles à traiter, puisque les textes n'en parlent pas. En revanche, l'approche théorique est jugée difficile, prématurée, en particulier pour la division.

La droite numérique est apparue en 1937-38, puis a disparu jusqu'en 1977 : on y place ou on y repère des points d'abscisse relative ou décimale. Il n'y a pas de calcul de distance (sauf en cinquième en 1985).

Le traitement de la proportionnalité a beaucoup varié. En 1937-38, les contextes sont évoqués : prix unitaire, poids spécifique, masse volumique, vitesse, échelle, pourcentage, rente, escompte... En 1960, les travaux pratiques permettent de mettre en évidence des correspondances entre grandeurs, dont la proportionnalité n'est qu'un exemple. En 1977, on étudie des "suites proportionnelles". En 1985, on fait intervenir la multiplication d'un décimal par un quotient de décimaux dans des problèmes de proportionnalité. En 1995, le quotient de décimaux est un opérateur intervenant dans les situations de proportionnalité.

On peut rapprocher cette grande variation de celle des désignations associées : fractions de grandeurs, écriture fractionnaire, quotient de décimaux, multiplicateur, opérateur... Les objets désignés ne sont pas les mêmes, leurs domaines d'emploi sont différents. Leur statut de nombre est-il clair pour les élèves ? On peut en douter si l'on en juge par le commentaire des programmes de 1995.

Reprenons les changements principaux dans un tableau récapitulatif.

Primaire - Cours moyen	**Secondaire, 6ème et 5ème**
1923 Décimaux associés aux grandeurs familières Décimaux, puis fractions décimales, puis fractions ordinaires.	1923 Fractions de grandeurs, pour reprendre les calculs sur décimaux.
	1937-38 Décimaux liés aux grandeurs. Demi-droite. Quel rôle pour la division de décimaux ? Ecriture fractionnaire liée à proportionnalité.
1945 Décimaux concrets. Fractions simples et pourcentages abstraits.	1947 Suppression de l'escompte et des rentes. Fractions avant décimaux.
	1960 Nombres liés à des mesures expérimentales. Fractions et décimaux non cités en 6ème. Des fractions de grandeurs aux fractions en 5ème.
1970 Nombres dissociés des grandeurs. Fractions comme opérateurs multiplicatifs. Add. et soustr. de décim. liées aux grandeurs Mult. et div. de décimaux formelles.	1968 Addition et soustr. de décimaux en 6ème. Multip. de décimaux en cinquième, sans div. Suppression de la proportionnalité et des fractions en 5ème.
1980 Décimaux comme nouveaux nombres formels, intercalation. Mult. et div. associées à grandeurs. Suppression des fractions comme opérateurs, Quelques fractions simples de grandeurs ou rapport partie/tout. Demi-droite numérique.	1977 Pratique des 4 opérations sur décimaux. Demi-droite numérique. Multip. de décimaux repoussée en 5ème.
	1985 Quotient de décimaux, écriture fractionnaire de décimaux, puis écritures fractionnaires. Calculatrice.
1991 Suppr. de la demi-droite numérique (1985) Séparation entre calculs formels et problèmes Report de la division de décimaux au collège. Calculatrice.	
1995 Calculatrice si l'usage est pertinent Report de la multip. de décimaux au collège. Écriture de fractions, comparaison de fractions de même dénominateur.	1995 Droite numérique pour décimaux en 6ème.

Principaux changements dans l'enseignement des décimaux

4. Discussion

Nous avions vu que l'école primaire avait donné, au fil des années, de plus en plus d'importance au calcul sur les décimaux de manière décontextualisée. Aujourd'hui, l'approche des *nombres et des grandeurs* est sensiblement la même dans les deux ordres d'enseignement. Les opérations sur les nombres sont réparties (calculs, techniques opératoires) : addition, soustraction et ordre, multiplication par un entier à l'école primaire, les autres opérations étant traitées au collège.

L'introduction de la *calculatrice* n'a pas changé le traitement des techniques opératoires à la main.

La *demi-droite graduée* a été retirée des programmes de fin d'école primaire (cycle 3) en 1985, disparition confirmée dans les textes ultérieurs. Elle est maintenue en sixième. Le but est de localiser des points. On ne cherche pas à étudier la proportionnalité entre distance géométrique et écart entre les nombres. Pourtant elle est nécessaire à la constitution et à la lecture des graphiques.

A l'école élémentaire comme au collège, on parle de calcul d'ordre de grandeur, de valeur approchée, à 0,1 ou 0,01 ou 0,001 etc. près. Il n'y a pas de mesure d'écarts. Sauf en 1968, l'aspect relatif de la valeur approchée ne fait pas partie des préoccupations de ces niveaux. Le calcul approché est un calcul "en gros" et les valeurs approchées à 0,1 ou 0,01 ou 0,001 etc. près, s'obtiennent en mettant en œuvre un algorithme pratique qui dispense de mesurer des écarts.

L'utilisation pratique des savoirs mathématiques dans des contextes de multiplication et de division de décimaux ne fait pas l'objet de développement. Pourtant, au fil des textes, nous avons relevé des points de divergence entre le traitement mathématique et le traitement pratique de ces questions. Le rapport entre connaissances pratiques et savoirs mathématiques n'est pas traité à ces niveaux de la scolarité.

Nous avons observé, autant à l'école primaire qu'au collège, de grandes variations sur le traitement des fractions. Nous avons observé, de plus, un traitement de la proportionnalité très instable. Ces variations ne nous paraissent pas fortuites : elles sont, pour nous, un indice d'insatisfaction dans le traitement conjoint de ces deux thèmes.

Nous nous étions appuyée au début de ce chapitre sur la différence faite par Berthelot & Salin sur les connaissances pratiques extérieures à l'école concernant l'espace et les savoirs du cours de géométrie. Nous l'avions transposée en "décimaux associés aux grandeurs familières" et "décimaux du cours de mathématiques". Cette différence nous paraît pertinente pour l'analyse, mais elle n'opère pas de la même manière que dans les domaines étudiés par Berthelot & Salin.

Nous avons identifié deux types de décimaux : ceux qui ont un format normé socialement, et ceux qui constituent un ensemble de nombres intermédiaire (au sens de l'inclusion) entre les entiers et les rationnels.

La référence aux décimaux associés aux grandeurs familières est passée en trois quarts de siècle de descriptions précises à une référence globale : problèmes d'addition, de soustraction, de multiplication par un entier à l'école primaire, résolution de problèmes concrets au collège. La référence aux usages pratiques est permanente dans l'enseignement du second degré, avec des proportions variables. Aujourd'hui, elles apparaissent principalement dans la partie "Organisation de données, fonctions" de l'enseignement secondaire.

La calculatrice est présentée, dans les deux ordres d'enseignement, sous ses aspects pratiques.

On ne peut dire que l'école primaire serait du côté des savoirs pratiques et le secondaire du côté des savoirs mathématiques.

Nous avions distingué dans le domaine du cours de mathématique les écritures comme calcul à faire et les écritures pour préparer l'algèbre. Les écritures de calcul à faire sont présentes à la fois à l'école primaire et au collège. Elles font partie du bagage minimum défini pour les élèves de collège. Les écritures pour préparer l'algèbre sont limitées à l'école primaire : on trouve uniquement le passage fraction décimale <-----> décimal. En revanche, l'enseignement secondaire y accorde plus de place et prépare ainsi le calcul littéral. Dans ce domaine encore, il n'y a pas de rupture entre l'école primaire et l'enseignement secondaire.

L'approche de la droite numérique (ou de la demi-droite), maintenant réservée au collège, ne fait pas l'objet de commentaires pédagogiques. Pour les concepteurs de programme, l'interprétation de la position de points et la localisation de nombres décimaux vont de soi. Il est inutile de mentionner la proportionnalité entre écarts numériques et distance géométrique. Considèrent-ils que cette partie est un sous-produit du travail prévu sur les échelles ?

Dans l'enseignement secondaire, les préoccupations concernant les propriétés mathématiques de la multiplication et surtout de la division de décimaux sont constantes, même si leur traitement a varié d'une période à l'autre. Il semble, pour les concepteurs de programme, qu'il soit trop tôt pour aborder l'étude de leurs propriétés de manière interne aux mathématiques. Ils en restent donc à une approche pratique, qui rend inutile à ce niveau le traitement pédagogique de ce que Neyret appelle le "rabattement" de tous les nombres sur les décimaux.

Notons que les concepteurs de programme ont laissé de côté les propriétés de densité des décimaux par rapport aux rationnels ou réels, à l'exception de la période des "mathématiques modernes". Il n'y a ni mesures d'écarts, ni intervalles emboîtés qui auraient pu en être une amorce. Nous nous interrogeons sur le maintien de ce choix aujourd'hui : il est en contradiction avec le souhait de faire émerger les savoirs mathématiques de résolutions de problèmes.

Chapitre III

ÉTUDE COMPARATIVE DES PROGRESSIONS DE RÉFÉRENCE

Les deux équipes de recherche, Brousseau d'une part, Douady & Perrin d'autre part, ont rédigé, à partir de leurs ingénieries, des documents à l'intention des enseignants de l'école élémentaire (1986 pour Douady & Perrin, 1987 pour Brousseau & Brousseau).

Nous baserons notre étude à la fois sur ces brochures et sur les documents de recherches qui les ont précédés, principalement la revue *Recherches en didactique des mathématiques.* Nous situerons les deux ingénieries par rapport aux textes officiels pour le cycle 3 (1985), la sixième et la cinquième (1985, 1987).

Nous présentons ci-après successivement :
- le cadre d'analyse,
- la progression du document Brousseau & Brousseau,
- la progression du document Douady & Perrin.

Nous établirons ensuite une comparaison entre les deux progressions et émettrons quelques hypothèses sur leur reprise par des enseignants exerçant dans des conditions ordinaires.

1- Le cadre d'analyse

Nous situerons notre étude dans le cadre actuel de la didactique des mathématiques, cadre dans lequel les séquences pédagogiques ont été conçues.

L'organisation des séquences repose sur l'hypothèse que l'enfant construit de nouvelles connaissances à partir de ses connaissances anciennes, au besoin en les remettant en cause pour les restructurer. Le rôle de l'enseignant est de favoriser l'articulation en savoir ancien et savoir nouveau, en favorisant l'émergence de nouveaux procédés de résolution, procédés qui deviendront la base d'un nouveau savoir.

Notons que ce type d'organisation de séquences est préconisé par les textes officiels depuis 1985. L'extrait que nous citons ci-après pourrait s'appliquer aux progressions que nous étudions.

> Chaque sujet mathématique n'est pas un bloc d'un seul tenant, il n'a pas à être présenté de façon exhaustive. Il convient au contraire de faire fonctionner, à propos de nouvelles situations et autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision, les notions et "outils" mathématiques antérieurement étudiés (...)
> (...) les professeurs vont avoir à choisir des situations créant un problème, dont la solution fera intervenir des "outils", c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles.

Lorsque celles-ci auront été bien maîtrisées, elles fourniront à leur tour des "outils" qui permettront un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente.

Les activités choisies doivent développer la capacité de se poser des problèmes et de progresser vers leur résolution. Elles doivent aussi :

- permettre un démarrage possible, pour tous les élèves, donc ne donner que des consignes très simples et n'exiger que les connaissances solidement acquises par tout le monde ;
- créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures ;
- rendre possible la mise en jeu des outils prévus ;
- fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement. On y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.[1]

Notre étude s'appuiera aussi sur la théorie des champs conceptuels et plus largement la théorie des schèmes (Vergnaud, 1991). Les champs conceptuels peuvent se définir comme :

> l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (...), l'ensemble des invariants sur lesquels repose le caractère opératoire des schèmes, l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement. [2]

ou encore comme :

> un ensemble de situations dont le traitement implique des schèmes, concepts et théorèmes, en étroite connexion, ainsi que les représentations langagières et symboliques susceptibles d'être utilisées pour les représenter. (...)
> Ce sont les concepts et théorèmes qui permettent d'analyser les différentes tâches cognitives contenues dans les situations, ainsi que les opérations de pensée mises en œuvre dans les schèmes de traitement utilisés par les élèves.[3]

Les champs conceptuels relatifs aux décimaux ont été abondamment décrits : nous nous bornerons à illustrer certaines des relations entre concepts.

- Les décimaux permettent d'exprimer des mesures de grandeurs dans le système métrique décimal ; à ce titre, ils sont structurés par l'ordre et l'addition.
- Les décimaux permettent d'exprimer des opérateurs multiplicatifs ; à ce titre, ils sont structurés par l'ordre et la multiplication.
- Ce sont des outils d'approximation dans des problèmes multiplicatifs.
- Les problèmes où ils interviennent peuvent être reliés à la proportionnalité, aux rationnels.
- Ces nombres sont écrits en base dix, la valeur des chiffres dépend de leur place dans l'écriture du nombre ; à chaque position correspond une puissance positive ou négative de dix.

---

1 Extrait des textes officiels de 1985 pour la classe de sixième. Tous les textes officiels ultérieurs rappelleront l'importance de la résolution de problèmes dans la construction des savoirs.

2 VERGNAUD, G. (1991), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 10, 2.3,* 133-170, p. 145.

3 VERGNAUD G. (Ed.) (1994a), *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?,* Paris: Hachette-Education.

Les systèmes symboliques associés aux décimaux dans la tradition pédagogique, ou pour reprendre l'expression de Duval les représentations sémiotiques, sont également bien connus :
- changement d'unités de grandeurs,
- multiplication ou division par 10, 100, 1000,
- conversions décimal ----> fraction décimale ou l'inverse,
- représentation par la droite numérique.

Lorsque nous examinerons les brochures décrivant les progressions, nous aurons accès aux situations proposées aux élèves, aux systèmes langagiers. Les commentaires des auteurs nous donneront des indications sur les procédures de résolution qu'ils souhaitent développer chez les élèves, ce que nous interpréterons en terme de schèmes auxquels les élèves recourent pour résoudre les problèmes associés.

Nous examinerons ensuite les documents en termes de variables didactiques. Des situations d'enseignement proches peuvent être comparées d'après les valeurs prises par certaines caractéristiques du problème en jeu, caractéristiques qui peuvent influer sur les choix de stratégie de résolution des élèves, et donc sur la construction de nouvelles connaissances.

Nous examinerons les progressions de référence en utilisant l'analyse faite au chapitre II pour les textes officiels. Quelle place ces progressions font-elles aux décimaux associés aux grandeurs familières ? Quel traitement fournissent-elles aux situations de multiplication ou de division de décimaux ? Quel sens donnent-elles au calcul approché ? Comment utilisent-elles la droite numérique ? Quelle relation établissent-elles entre rationnels et proportionnalité ? Nous excluons de notre examen l'emploi de la calculatrice, car elle n'était pas présente à l'école à l'époque des expérimentations, pour des raisons de coût.

Nous situerons enfin les progressions de référence par rapport aux exigences des textes officiels de 1985, en vigueur au moment de notre propre expérimentation.

2- La progression adoptée par Brousseau & Brousseau

La brochure qui présente la progression de l'équipe de Brousseau traite à la fois des rationnels et des décimaux dans la scolarité obligatoire (397 pages sans annexes). Les 65 leçons qui y sont décrites ont toutes été réalisées au moins une fois, et presque toutes chaque année, de 1973 à 1987, à l'école Jules Michelet de Talence. Quelques séances supplémentaires sont conseillées pour les niveaux de sixième et cinquième.

2.1- Les options de l'ingénierie

Quelles situations donnent du sens aux nombres décimaux ? Comment les faire fonctionner dans la classe ? Ce sont quelques-unes des interrogations que pose Brousseau dès 1980.

> On peut imaginer - et l'histoire l'atteste - qu'il existe des représentations différentes pour les décimaux.
> Par exemple :
> R1 : 0,3 est "ce qui multiplié par 10 est égal à 3".
> R2 : 0,3 est "3 fois la dixième partie de 1".
>
> Pourrons-nous en choisir une autre, que la représentation dominante, et l'enseigner pour en observer les effets ?

(...) Comment élaborer des situations qui fassent réellement fonctionner une notion ? C'est-à-dire qu'on ne peut pas répondre sans mettre en œuvre cette notion et sans lui donner un sens. De quels paramètres dépendent qualitativement les procédures qui attestent l'usage de cette notion ?
Comment rendre une assimilation (au sens de Piaget) nécessaire ? Quand une accommodation (id) est-elle indispensable ? [4]

Comment doivent s'articuler les différentes notions reliées aux décimaux : décimaux-mesure, décimaux-application, rationnels, proportionnalité, approximation ? Les options sont décrites et situées par rapport aux possibilités des élèves et aux habitudes enseignantes.

a) L'acquisition des décimaux-mesure suivra un processus distinct de celui visant les décimaux-application. Ils se succéderont dans cet ordre.

b) Dans plusieurs cas, les décimaux seront présentés comme des rationnels, simple réécriture des fractions décimales. Les rationnels seront donc construits les premiers dans les deux étapes. Cela n'est pas très original pour les opérateurs. Par contre, pour les mesures, cela va à l'encontre des habitudes culturelles les mieux établies.

c) Les fractions décimales-mesures seront choisies par les élèves pour approcher des rationnels, à cause des facilités de calcul qu'elles présentent.
Les problèmes topologiques exigent justement de nombreuses comparaisons et des calculs d'intervalles. Ils mettront de plus, en évidence, les propriétés de l'ordre naturel de Q et de D qui s'opposent à celles de N.
Cette approche topologique ne sera pas reproduite dans l'étude des applications linéaires rationnelles. Il s'agit bien d'une option : nous avons montré dans une autre partie de la recherche, que nous ne rapportons pas ici, qu'une telle approche est possible.

e) Nous tenterons de faire acquérir, ou fonctionner, s'ils sont acquis, les modèles implicites avant d'en provoquer la formulation ou l'analyse. Nous admettrons que les enfants possèdent un modèle implicite de la proportionnalité dans N.
Les sommes et les différences d'applications rationnelles, bien que rencontrées, ne seront ni théorisées ni institutionnalisées.[5]

Le projet tranche avec les habitudes du milieu enseignant. Il se veut pourtant reproductible.

Cet ouvrage a pour objet de communiquer aux enseignants qui voudraient les reproduire les situations qui nous ont permis de provoquer chez nos élèves des processus d'apprentissages passionnants pour eux à vivre et pour nous à observer.
A cet effet, nous avons essayé de rapporter de chaque leçon, non pas son déroulement, son histoire, avec tout ce qu'elle a de vivant, d'inattendu, donc d'unique, mais au contraire, sa logique, sa nécessité et ce qu'elle peut reproduire.
Et pour éviter de propager quelques scénarios imaginaires de plus, nous n'avons retenu que des faits attestés et reproduits. [6]

La brochure qui décrit la progression fournit un mode d'emploi pour ceux qui voudraient reprendre les séquences expérimentales dans leur classe.

[4] BROUSSEAU, G. (1980), op. cit. p. 55.
[5] BROUSSEAU, G. (1981) , op. cit. p. 53.
[6] BROUSSEAU, G., & BROUSSEAU, N. (1987), op. cit. p. 2.

Bien sûr, tout peut être modifié dans ce cours, mais nous devons aussi mettre en garde les enseignants contre des modifications, même légères, dont les conséquences n'auraient pas été assez sérieusement examinées, ou contre des emprunts superficiels de nos leçons, injectées dans un processus classique. [7]

Les séquences d'apprentissage sont décomposées, en général, en plusieurs phases :
- l'exposé du problème (le maître s'assure que la consigne a du sens pour les élèves),
- la recherche par les élèves, individuellement ou en groupe,
- la présentation des résultats par les élèves, le débat entre élèves, qui débouchent sur de nouvelles questions, une extension des procédures utilisées,
- une synthèse où le maître met en valeur les caractères importants du problème, les détache de leur contexte, les "institutionnalise",
- l'entraînement des élèves, leur évaluation,
- le réinvestissement dans d'autres problèmes plus complexes.

On peut résumer ce processus par le jeu de contextualisation et décontextualisation.

Notons que ce ne sont pas les pratiques dominantes du milieu enseignant : en particulier, le recours aux jeux de communication, aux "concours de problèmes", les débats de validation où l'enseignant laisse dire le faux et le vrai ne sont pas fréquents dans les classes ordinaires. En effet, ces pratiques demandent, de la part de l'enseignant, une grande maîtrise du temps et de l'organisation de la classe ainsi qu'une confiance en soi sans faille.

Nous allons balayer les 15 modules d'enseignement qui correspondent à 65 leçons.

Les modules sont constitués de séquences dont la description se fait suivant des rubriques stables tout au long de la brochure : rappel de la situation antérieure, matériel, présentation de la situation, première phase, procédures, deuxième phase etc., synthèse, remarques, résultats. La brochure suit l'ordre chronologique (les leçons sont numérotées).

2.2- L'introduction des rationnels : mesure de grandeurs

Les 7 premiers modules permettent d'introduire la structure additive et ordonnée des rationnels, et leur multiplication ou division par un entier. La grandeur-phare est la longueur (épaisseur d'une feuille, longueur d'une baguette), mais des exercices portent également sur la manipulation effective de masses, de capacités et des problèmes évoquent les prix.

C'est la commensuration qui donne du sens à l'écriture d'une fraction : 7/4 représente la mesure d'une grandeur avec une unité de référence, qui répétée 4 fois mesure 7 unités. Les propriétés de base sont d'abord contextualisées (les unités de grandeurs sont exprimées), puis utilisées sans référence aux grandeurs :

$7/4 \times 4 = 7$ ou encore $7/4 + 7/4 + 7/4 + 7/4 = 7$

$7/4 > 1$ parce que $4/4 = 1$

$35/4 : 7 = 5/4$

A l'issue de ce premier groupe de modules, les enfants utilisent la représentation de la demi-droite numérique, avec le double statut de position et de longueur pour les rationnels ou décimaux. Le

[7] Ibid.. p. 2.

passage rationnel ----> écriture décimale et l'inverse donnent du sens à l'algorithme de la division que l'on "pousse". Des exemples d'emploi de décimaux sont proposés dans des problèmes qui évoquent les longueurs, les prix, les masses, les capacités.

Reprenons ces modules plus en détail.

Le module 1 introduit l'écriture des rationnels à travers un problème de commensuration : trouver un moyen de désigner l'épaisseur d'une feuille de papier, alors qu'on ne peut pas la mesurer directement. Les élèves comparent des épaisseurs, déterminent des égalités d'épaisseurs. Les invariants sur lesquels reposent cette introduction sont en lien avec la proportionnalité : 7 feuilles A ont une épaisseur de 2 mm, alors 14 feuilles A ont un épaisseur de 4 mm ; 10 feuilles B ont une épaisseur de 4 mm, elles sont plus épaisses que les feuilles A.

La notation 2/9 est associée (codage et décodage) au fait que 9 feuilles mesurent 2 mm, 1 feuille mesure alors 2/9 mm. Les élèves peuvent comparer des fractions à des entiers.

Le module 2 introduit l'addition (et donc la soustraction) à partir du problème posé par le collage de deux feuilles d'épaisseurs différentes (10/50 et 40/100).

L'additivité des épaisseurs est admise par les élèves, mais le contrôle par l'action (mesures effectives) conduit à des approximations de type 61/100 ou 59/100. La différence entre "calculer" et "mesurer" directement n'est pas encore établie pour tous les élèves.

Les calculs de somme ne conduisent à aucune algorithmisation : ils sont résolus cas par cas.

La fabrication d'un carton à partir de feuilles identiques donne du sens à la multiplication d'un rationnel par un entier : 3/19 x 4, c'est l'épaisseur d'un carton fait de 4 feuilles de 3/19 mm. Cette multiplication est associée à des schémas de type "opérateurs" où l'inconnue est placée à différents endroits :

$4/5 \xrightarrow{\times 9} ?$ quelle est l'épaisseur du carton fait de 9 feuilles de 4/5 mm ?

$36/5 \xrightarrow{:9} ?$ quelle est l'épaisseur d'une feuille quand le carton de 9 feuilles fait 36/5 mm ?

Le module 3 porte sur l'extension du codage/décodage à d'autres grandeurs, toujours par commensuration, des unités de référence étant fournies : masse d'un clou, capacité d'un verre, longueur d'une baguette. La gestion des coïncidences approximatives n'est pas facile, l'approximation fait pourtant partie du processus de mesure.

La fabrication d'une baguette dont la longueur est désignée par un rationnel permet de faire émerger le partage de l'unité de grandeur, ce qui élargit le sens de l'écriture fractionnaire.

> Pour fabriquer une bande de longueur 5/4 de l'unité, la représentation que nous avons déjà introduite et que nous appellerons Ma permet plusieurs méthodes :
> - soit on prend une longueur quelconque, on la reporte 4 fois et on compare la longueur obtenue à 5 unités, puis on corrige par tâtonnements, (Ma)

- soit on reporte 5 fois l'unité puis on partage cette longueur en 4 : cette deuxième méthode exige déjà d'avoir un usage assez souple de la définition donnée.

Il en existe une troisième plus efficace si on doit fabriquer diverses baguettes de dénominateur 4 : on partage l'unité en 4 et on reporte le morceau obtenu 5 fois (Mb). C'est cette méthode que nous allons essayer de faire apparaître sans espérer que les enfants montrent ou disent qu'elle est équivalente à l'autre. [8]

L'équivalence des méthodes résulte de la multiplication : 4 baguettes mesurent 5 u.

Les problèmes proposés ensuite ne relèvent pas des grandeurs, mais des rapports partie/tout, où la nouvelle unité est une collection (sac de bille) ou une longueur déjà exprimée en mètres (fraction d'une pièce de tissu). Les auteurs notent que ces problèmes sont difficiles. On peut se demander si leur place ne serait pas au module 11 (prendre les trois quarts d'un nombre).

Les modules 4 et 5 utilisent le vocabulaire des intervalles, à travers un calcul d'estimation de somme de rationnels exprimant des longueurs. Tous les élèves ont compris que l'on peut encadrer une somme entre deux entiers. La demi-droite numérique est utilisée comme représentation symbolique qui illustre l'emboîtement des intervalles. Ces activités sont jugées difficiles.

Localiser une fraction avec des intervalles de plus en plus petits met en évidence que les calculs sont très compliqués pour des fractions ordinaires, et beaucoup plus faciles pour des fractions décimales. Sur la demi-droite numérique, les rationnels désignent à la fois une position et une longueur, sans qu'il y ait un travail spécifique sur ce changement de point de vue. C'est l'enseignant qui introduit les décompositions additives du type $1 + 4/10 + 5/100$ et les écritures décimales associées.

Le module 6 propose tout d'abord des problèmes additifs et soustractifs portant sur des grandeurs exprimées (longueurs, prix) sous forme décimale. Les longueurs ne sont pas toutes exprimées sous la forme sociale habituelle : 0,3 m au lieu de 0,30 m.

La multiplication par 10, par 100, par 1000 avait déjà un statut dans les rationnels : son effet sur l'écriture décimale est ensuite étudié. Les problèmes multiplicatifs suggérés portent sur les masses et prix à l'unité ou par "paquet" : 12 pelotes à 25,50 F la pelote ; 375 g de beurre à 3,25 F les 125 g.

Le module 7 est celui au cours duquel les élèves vont être invités à chercher une approximation décimale d'un rationnel et à faire le lien avec l'algorithme de la division euclidienne. La question est posée en termes formels, sur les écritures, en liaison avec la représentation de la droite numérique.

Voici une liste de nombres décimaux que vous allez ranger du plus petit au plus grand : 148,0978 - 148,97 - 148,95 - 148 - 149,1 - 148,0999 - 148,932. Maintenant, vous allez placer dans cette liste la fraction 4319/29 [9]

Les enfants découvrent, laborieusement, qu'il existe deux méthodes pour transformer une fraction décimale en nombre à virgule : ils peuvent rechercher successivement les unités, les dixièmes, les centièmes, etc. ou "prolonger" l'algorithme de la division euclidienne à la main [10].

---

[8] Op. cit. p. 54.

[9] Op. cit. p. 117.

[10] Ce passage entre le registre de l'écriture fractionnaire et celui de l'écriture décimale, décrit comme difficile, illustre la question pédagogique du changement de registres étudié par Duval (1995).

Les problèmes d'entraînement portent sur le calcul du prix moyen d'un numéro de revue achetée par abonnement, ou du prix moyen d'un litre de mélange obtenu à partir de différents produits.

2.3- Proportionnalité et multiplication "externe" des rationnels

Un deuxième groupe de modules porte sur les situations qui vont donner du sens à la multiplication d'un rationnel par un rationnel. Cette multiplication sera "externe", d'un point de vue mathématique : 1/3 x 2/5 désigne l'image de 1/3 dans l'application linéaire de multiplicateur 2/5. Plus précisément, le premier rationnel (1/3) exprime une mesure de grandeur, le deuxième est le multiplicateur d'une application linéaire (ou encore l'image de 1 dans cette application) et le produit est l'image du rationnel dans cette application. Cette "multiplication" permet d'enrichir les situations de division déjà connues.

Reprenons la succession des modules de cette deuxième partie.

Le module 8 introduit tout d'abord une situation d'agrandissement définie par une mesure et son image dans l'agrandissement d'un puzzle. Quelles sont les images des mesures des autres pièces ?

Pour l'agrandissement 4 ----> 11, quelle serait l'image de n'importe quelle mesure exprimée par un entier ? l'image de 5/7 ?

Pour ce faire, les enfants utilisent intuitivement les propriétés des applications linéaires et ce qu'ils savent de la multiplication (et de la division) d'un rationnel par un entier.

4 ----> 11	ou encore	4 ----> 11	
1 ----> 11/4		1/1 ----> 11/4	
5 ou 5/1 ----> 55/4		1/7 ----> 11/28	
5/7 ----> 55/28		5/7 -----> 55/28	

L'extension est faite ensuite au cas de mesures décimales, ce qui permet d'établir l'algorithme de la division par 10, 100, 1000.

Le module 9 introduit le multiplicateur rationnel (l'image de 1) et la distinction entre valeur mesurée directement et valeur calculée directement. Pour les auteurs, "la théorie de l'approximation d'une application est hors de portée des élèves, mais pas la pratique." [11]

Les modules 10 et 11 élargissent le champ de l'emploi du produit de rationnels dans des situations linéaires (pas seulement les agrandissement ou réductions) : ils vont être utilisés pour désigner des applications linéaires, puis des rapports. Prendre les trois quarts d'un nombre, c'est aussi une application linéaire.

> Il est important de faire identifier aux élèves :
> - l'ensemble de départ, la "chose dont on prend une fraction", qui est souvent nommée après la fraction,
> - la correspondance (la manière de trouver l'image d'un nombre donné),
> - l'ensemble d'arrivée, ce qui est d'autant plus difficile à distinguer que la langue française permet la confusion constante entre une opération et son résultat, une application et son image, une action ou un fait et l'état qui en est la conséquence.

[11] Op. cit. p. 167.

(...) Les élèves sont invités à poser les questions et inventorier les questions possibles:
- recherche de l'image (la fraction d'une quantité),
- recherche de l'objet (la quantité dont on connaît la fraction)
- recherche de l'application (la fraction prise, ou le rapport de deux grandeurs) (...)

Les élèves constatent qu'ils ne peuvent "rien calculer" s'ils ne connaissent pas la quantité ou le nombre "dont ils prennent une fraction", mais ils peuvent faire des tableaux, tout comme ils peuvent dessiner un rectangle dont la largeur est les deux tiers de la longueur.[12]

Les trois catégories de problèmes sont traités ensuite. Les domaines d'entraînement sont divers : fractions d'aires de rectangles, fractions de longueurs (avec guide-âne), pourcentages, correspondances entre deux mesures de même espèce (échelle) ou non. Des expressions du genre "13 nœuds à l'heure", "130 pièces à la minute", "4,5 kg de potasse pour 50 kg de X", sont utilisées. Pour les problèmes d'échelle, les difficultés ne relèvent pas seulement de la proportionnalité :

Même avec les méthodes pédagogiques les moins raffinées, l'introduction de la notion d'échelle ne semble pas présenter pour les élèves d'autres difficultés que de manier des fractions à grand dénominateur. Nous avons cependant pu observer les limites de la connaissance ainsi acquise par les élèves : c'est un algorithme utilisable, au plus, dans quelques situations stéréotypées, et les élèves rencontrent de grandes difficultés à mettre réellement en correspondance le terrain et la carte, orienter celle-ci, s'orienter eux-mêmes et à maîtriser concrètement cette relation de similitude qui nous paraît si évidente. [13]

Cette remarque est d'autant plus importante que la demi-droite numérique et, plus généralement, les graphiques utilisent de manière implicite la notion d'échelle : des écarts entre des nombres sont représentés proportionnellement par des longueurs.

2.4- La division de rationnels

Les 4 derniers modules permettent d'enrichir le concept même de division, qui, jusqu'ici, était réservé à la division d'entiers. Il s'agit tout d'abord de donner du sens à la division d'un rationnel exprimant une mesure par un rationnel désignant une application. Cette étude se poursuit par l'introduction d'une nouvelle représentation de la multiplication comme composition d'applications linéaires, ce qui créera un nouveau sens pour la division. Elle se termine seulement lors de l'unification des différentes approches que les auteurs ont suscitées chez les élèves. Les auteurs insistent sur les inconvénients d'un ancrage exclusif sur la division-partage, qui fait obstacle à l'extension de la division aux rationnels, en particulier quand le quotient est compris entre 0 et 1.[14]

Dans le module 12, un concours de problèmes, dans lesquels on fait varier les nombres, permet le classement suivant des types de problèmes de division d'entiers :
- partager,
- trouver un terme inconnu d'un produit,

12 Op. cit. p. 234- 235.
13 Op. cit. p. 256.
14 Op. cit. p. 293.

- trouver l'image de 1 ou le nom d'une application linéaire,
- trouver le rapport de deux nombres,
- approcher une fraction avec un décimal.

Le module 13 commence le travail d'unification. Par exemple, si 8 feuilles mesurent 3 mm, l'épaisseur d'une feuille est 3/8 mm. On peut alors écrire 3 : 8 = 3/8, là où auparavant on écrivait seulement 3/8 x 8 = 3

En conjuguant l'étude des applications linéaires réciproques et l'idée que la division permet de trouver le terme inconnu d'un produit apparaît l'idée de la division en tant qu'application linéaire. Ici, les applications linéaires deviennent des "objets".

> Situation : Une place de cinéma coûte 35 F. La recette totale d'une salle est de :
> 3325 F le lundi,
> 4480 F le mardi, etc.
> 6230 F le dimanche.
>
> 1- Combien y a-t-il eu de spectateurs payants pour chacun des jours de cette semaine ?
> 2- Vous allez disposer dans un tableau : les recettes quotidiennes dans la colonne de gauche et le nombre de spectateurs dans la colonne de droite.
> 3- Est-ce que "diviser par 35" est une application linéaire ?
>
> (...) L'enseignant pose alors la question : Pour un problème de multiplication, nous avions 2 problèmes de division. Quel est l'autre problème de division qui correspond à la situation où l'on considère l'épaisseur de chaque feuille, le nombre de feuilles, et l'épaisseur totale du carton ?
> Les élèves (avec l'aide du maître éventuellement) peuvent alors produire l'énoncé : J'ai collé des feuilles de 2/7 mm d'épaisseur et j'ai obtenu un carton de 18/7 mm d'épaisseur. Combien ai-je collé de feuilles ? [15]
> (...)
> Situation : Le jeu du portrait, pour travailler sur les propriétés des rationnels et des applications linéaires.
>
> Il s'agit d'un jeu à deux. Le proposant "vend" une suite d'informations sur une application linéaire cachée. L'opposant "achète" certaines de ces informations jusqu'à ce qu'il puisse être sûr de connaître (d'en déduire) cette application cachée. Il dit alors "je sais". On compare alors l'application devinée à celle cachée sur la fiche "application" correspondante.
>
> Pour augmenter le plaisir des élèves, le proposant est autorisé à proposer certains renseignements faux (plus exactement contradictoires avec d'autres). S'il arrive à vendre à l'opposant des renseignements contradictoires, il s'écrie "gagné" et l'autre perd la partie. (...) Mais si l'opposant détecte qu'un renseignement est contradictoire avec ceux qui lui ont été fournis précédemment, il s'écrie "menteur" et gagne. Bien sûr à chacun de prouver ses dires. [16]

Le travail s'achève sur une liste de problèmes que l'on peut associer à 4 : 3/5

> 1- Partager 4 m de ruban en parts de 3/5 m.
> 2- On achète 3/5 m de ruban que l'on paie 4 F. Quel est le prix du mètre ?
> 3- Un tapis a une aire de 4 m^2 et une largeur de 3/5 m.

[15] Op. cit. p. 305-306.
[16] Op. cit. p. 315.

4- Pantographe : on a obtenu une image qui est les 3/5 de son modèle. On veut obtenir, à partir de cette image, une autre image agrandie qui soit 4 fois plus grande que la première image. Quel pantographe faut-il choisir ?

$$\xrightarrow{\;3/5\;} \quad \xrightarrow{\;\times\, ?\;}$$

$$\xrightarrow{\qquad\qquad \times\, 4 \qquad\qquad}$$

5- Paul mesure la longueur du bureau avec une baguette. Elle entre exactement 4 fois. Jacques, lui, a pris une baguette qui est exactement les 3/5 de celle de Paul. Quelle mesure trouvera-t-il pour le bureau ?[17]

On peut noter que ces problèmes se traitent facilement par l'algèbre, avec une mise en équation qui s'appuierait sur la multiplication. Ce n'est pas sous cet angle, semble-t-il, que Brousseau & Brousseau souhaitent traiter ces questions à ce niveau de la scolarité.

2.5- Les caractéristiques de la progression Brousseau & Brousseau

Remarquons tout d'abord la lisibilité de la brochure Brousseau & Brousseau. Tous les modules décrits adoptent un même plan. Ils sont présentés dans l'ordre chronologique de leur utilisation. Les consignes sont indiquées avec un niveau de langage adapté aux élèves de fin d'école primaire.

Illustrons par un schéma la progression adoptée par Brousseau & Brousseau.

[17] Op. cit. p. 367.

Épaisseur mesurée par commensuration.
7/4 tel que
$7/4 + 7/4 + 7/4 + 7/4 = 7$
Couples équivalents.

Additivité des épaisseurs.
Multiplication et division par un entier.

Extension à d'autres grandeurs : longueurs, masses, capacités.
Codage et décodage.
Liaison avec le partage de l'unité de grandeur.

Ordre des rationnels, liaison avec les décimaux, Représentation par la demi-droite numérique.
Fractions décimales approchant un rationnel.

Décimaux représentant des grandeurs.
Additivité.
Encadrement de décimaux. Ordre.

Liaison entre fractions décimales et décimal.
Liaison entre algorithme de la division euclidienne qu'on pousse et approximations décimales d'un rationnel.

Valeur mesurée, valeur calculée d'une mesure.

Agrandissement du puzzle.
Image d'une fraction. Extension aux mesures décimales.

Le multiplicateur est l'image de 1.
Les rationnels désignent des multiplicateurs dans des situations de linéarité.

Enrichissement des situations de division de rationnels.

Étude des applications linéaires.

Nous pouvons maintenant caractériser la progression adoptée par Brousseau & Brousseau, en reprenant les indicateurs choisis plus haut [18].

[18] La disposition en colonnes est fortuite : en fait, le schéma est linéaire.

- Les problèmes qui évoquent des grandeurs sont traités au fur et à mesure que s'enrichissent les écritures formelles (contextualisation, décontextualisation, recontextualisation), les grandeurs familières sont présentes.
- Des grandeurs autres que les longueurs sont effectivement mesurées (masses, capacités).
- Les rationnels sont définis d'abord comme mesures de grandeurs (commensuration, partage de l'unité), puis comme fonctions linéaires.
- L'addition et la comparaison de rationnels s'appuient sur l'additivité des longueurs.
- La multiplication des rationnels est d'abord "externe" (une mesure de grandeur par une fonction linéaire), puis "interne" (composition de fonctions linéaires).
- Les décimaux servent à situer par approximation un rationnel et traiter des problèmes de la "vie courante".
- La demi-droite numérique et les schémas avec flèches constituent les principaux registres sémiotiques.
- Les fonctions linéaires sont progressivement désignées par des "opérateurs" entiers, décimaux ou rationnels (opérateurs multiplicatifs ou "divisifs"[19] et leur composition), les nombres sur lesquels elles opèrent et leurs images peuvent être aussi bien des entiers, des décimaux ou des rationnels.
- L'approximation est abordée dans le cadre des grandeurs physiques (mesurer) et dans celui des mathématiques (calculer).

Situons la progression Brousseau & Brousseau par rapport aux programmes officiels de 1985.
- Les méthodes préconisées dans la brochure sont semblables à celles recommandées dans les textes officiels de 1985 et suivants.
- La brochure s'appuie sur des résolutions de problèmes qui évoquent des grandeurs ou y recourent effectivement. Les grandeurs familières sont présentes.
- Les questions d'approximation utilisent explicitement le vocabulaire de distance, d'intervalle, en liaison avec des activités effectives de mesures de grandeurs physiques et des calculs. La connexion est faite entre les points de vue adoptés en technologie (fabriquer), en physique (mesurer) et en mathématiques. Le souci de lier physique et mathématique est conforme aux recommandations générales des textes officiels, mais les notions de distance et d'intervalle débordent le contenu explicite des thèmes mathématiques à enseigner.
- Contrairement à la progression des instructions officielles de l'école élémentaire et du collège, les rationnels sont introduits avant les décimaux. La comparaison et l'addition de rationnels sont introduits avant la multiplication, en prenant appui sur les propriétés des mesures de grandeurs. Le produit de rationnels est lié explicitement aux situations de proportionnalité (multiplication externe, puis interne). Cette progression a très peu de choses en commun avec les programmes officiels, qui prescrivent, eux, d'enseigner les décimaux avant les rationnels, les rationnels apparaissant en sixième d'abord comme des quotients de décimaux, multiplicateurs de décimaux.

3- La progression adoptée par Douady & Perrin

La progression est présentée dans une brochure de 177 pages qui traite à la fois des rationnels et des décimaux dans la scolarité obligatoire. Les expérimentations correspondantes se sont déroulées de 1972 à 1978. La plupart des séquences proposées ont été expérimentées en CM1 et CM2, et certaines l'ont été dans des classes de sixième.

19 Mot de notre création, sur le modèle de "multiplicatif".

3.1- Les options de l'ingénierie

Dans le premier numéro de la collection *Recherches en didactique des mathématiques*, R. Douady pose les bases des recherches qui ont conduit à des avancées théoriques importantes en didactique : le jeu de cadres et la dialectique outil-objet. Les décimaux sont considérés comme des nombres permettant d'approcher d'aussi près que l'on veut des nombres réels.

> (...) quels sont les problèmes scientifiques qui ont motivé l'introduction des nombres décimaux et ceux qui justifient leurs divers emplois à l'heure actuelle dans les sciences et dans la vie courante ?
>
> Il s'agit presque toujours de problèmes d'approximation de nombres réels définis soit par des mesures de grandeurs physiques, soit comme solution de problèmes mathématiques : par exemple, construire des tables de sinus, de logarithmes, décrire numériquement les solutions d'équations polynomiales. Pour répondre à ces problèmes, on aura besoin de raisonner et calculer avec les nombres réels. Mais selon les nombres en jeu, les calculs seront plus ou moins difficiles. Or toute mesure s'accompagne d'une erreur de mesure et certains calculs (par exemple sinus, logarithmes...) ne sont possibles que de façon approchée. Pour donner un cadre à ces calculs, on est amené à construire une échelle de nombres, raffinable à volonté, qui permette d'encadrer n'importe quel nombre réel d'aussi près qu'on veut et telle que les calculs avec les nombres retenus pour cette échelle soient faciles. Les nombres rationnels répondent à des exigences arbitraires de précision, mais les comparaisons et les additions sont pénibles. Les nombres décimaux, compte tenu de notre système en base dix, répondent aux besoins.[20]

Les élèves doivent pouvoir se comporter en classe comme des chercheurs.

> Notre hypothèse est que l'enseignement doit intégrer dans son organisation des moments où *la classe simule une société de chercheurs en activité* [21]. Or bien des éléments de la vie de la classe agissent en obstacle à une telle simulation. (...) Par exemple, il est rare qu'à l'école primaire les nombres décimaux servent à désigner de manière approchée, d'aussi près qu'on veut, une mesure qu'on ne sait pas désigner de manière exacte par un nombre. On peut objecter que ce point de vue correspond au savoir savant *"R est le complété de D"*, et n'a pas sa place à l'école primaire. Notre expérience montre au contraire que ce point de vue est constitutif du sens de la notion, y compris dans une perspective d'usage pratique et qu'il est possible d'organiser l'enseignement de façon que les élèves d'une classe dans leur ensemble intègrent la connaissance des nombres décimaux avec toute leur richesse d'outil et une partie de leur aspect objet. [22]

Les cadres utilisés sont essentiellement les cadres graphiques et la graduation régulière d'une droite (ou demi-droite).

> Les nouveaux nombres sont créés pour répondre à des situations de mesure où les nombres entiers sont insuffisants. Dans les situations proposées on joue sur l'interaction entre le cadre numérique et les cadres géométrique ou graphique pour faire progresser les connaissances sur les nombres.

---

20 DOUADY, R. (1980), p. 80.

21 Souligné par l'auteur.

22 DOUADY, R. (1986), *Recherches en didactique des mathématiques n° 7, 2,* Jeux de cadre et dialectique outil-objet, 5-31, p. 12.

Les nouveaux nombres créés sont d'abord écrits sous forme fractionnaire. Les fractions décimales sont utilisées pour simplifier les calculs et la convention de la virgule apparaît pour simplifier l'écriture. Une grande importance est accordée à la graduation d'une droite en interaction avec l'ordre des nombres et les opérations (addition, soustraction).

Par ailleurs, les nombres, qu'ils soient entiers, fractionnaires ou décimaux, sont utilisés pour désigner des coefficients de fonctions numériques linéaires, i.e. des coefficients de proportionnalité et ramener les calculs sur les fonctions linéaires (addition, composition, comparaison) à des calculs sur les nombres (addition, multiplication, comparaison).

D'autre part, dans toutes les situations choisies, nous avons eu le souci de faire fonctionner les notions dont on visait l'apprentissage avant de leur donner le statut de connaissances à retenir, avec le vocabulaire adapté, puis de les réutiliser dans des situations différentes.[23]

Les séquences d'apprentissage sont décomposées, en général, en plusieurs phases, comme dans le cas de la progression Brousseau & Brousseau : exposé du problème, recherche par les élèves individuellement ou en groupe, débat entre élèves, synthèse par le maître, entraînement des élèves, réinvestissement dans d'autres problèmes plus complexes. Les problèmes présentent certaines caractéristiques :

- L'énoncé (contexte et questions) a du sens pour les élèves.
- Compte tenu de leurs connaissances, les élèves peuvent engager une procédure de résolution, mais ils ne peuvent pas résoudre complètement le problème.
- Les connaissances visées par l'apprentissage (contenu ou méthode) sont des outils adaptés au problème.
- Le problème peut se formuler dans au moins deux cadres différents.[24]

Les connaissances antérieures des élèves interviennent comme outils explicites quand ils s'engagent dans la résolution. La recherche provoque chez eux l'élaboration d'une connaissance souvent partielle, le plus souvent implicite. Cette connaissance est explicitée lors du débat, puis progressivement détachée des exemples contextualisés où elle intervient. L'enseignant donne alors un statut d'objet aux concepts utilisés antérieurement dans leur aspect outil : les élèves peuvent s'entraîner à résoudre des problèmes voisins.

On trouve dans la première partie de la brochure destinée aux enseignants un développement des points précédents.

Dans l'approche des nombres décimaux que nous proposons, les fonctions interviennent implicitement et jouent un rôle d'outil dans les problèmes de proportionnalité et dans les problèmes d'approximation.

Il n'y aura pas à leur propos d'institutionnalisation sauf dans le cas des fonctions linéaires, et même dans ce cas, on n'utilisera pas le mot "fonction" mais celui adapté à la situation comme par exemple échelle, vitesse.
Les fonctions interviennent déjà comme outil pour résoudre des problèmes de proportionnalité sur les entiers, donc pour traiter de quantités discrètes.

---

23 Page de couverture de la brochure DOUADY, R. & PERRIN, M.J. (1986), op. cit..

24 DOUADY, R. (1986), op. cit. p. 13.

L'approximation est un moyen de traiter de grandeurs continues par l'intermédiaire de quantités discrètes. On se sert, comme outil implicite, de la continuité et de la monotonie, au moins locales, des fonctions en jeu dans le problème pour obtenir de l'information sur des grandeurs qu'on ne peut pas mesurer.[25]

La deuxième partie de la brochure présente des séquences de classe, regroupées par thèmes, dont la succession correspond le plus souvent au déroulement chronologique dans les classes.

3.2- L'introduction des rationnels : mesure de grandeurs

Examinons tout d'abord les quatre premiers chapitres où apparaissent les rationnels et les fractions décimales.

Les grandeurs-phares sont la longueur et l'aire.

C'est le partage de l'unité qui donne du sens à l'écriture d'une fraction.

7/4 représente la longueur d'une bande de papier faite de 7 bouts de longueur 1/4.

7/4 = 7 x 1/4

= 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4

7/4 > 1 parce que 7/4 = 1 + 3/4

Un travail est fait alors sur la représentation de ces nouveaux nombres sur la demi-droite numérique. Le problème de situer une fraction sur un axe gradué est posé, ce qui introduit le thème de l'approximation, des encadrements, des intervalles ; ce problème est rattaché à celui de diviser un entier a par un entier b. Les fractions décimales sont alors introduites comme des instruments facilitant les calculs d'approximation.

Les nouveaux nombres interviennent dans des problèmes utilisant la proportionnalité : carte d'un circuit de course, agrandissement d'un puzzle.

Reprenons ces chapitres en détail.

La première séquence permet d'introduire l'écriture des fractions de type 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, etc.

Les élèves sont invités à écrire un message sans dessin qui permette de reconstituer un segment superposable au leur, une unité ayant été préalablement choisie. L'approximation est déjà présente dans le jeu de message.

> Émetteur et récepteur ont (...) à se mettre d'accord (...) sur la précision de la mesure qu'il est raisonnable d'exiger. [26]

Une unité de longueur étant fixée pour toute la classe, on fournit aux élèves une demi-droite où ils placent le point correspondant à 1. Les élèves sont entraînés successivement à placer un point à une distance donnée de l'origine, entière ou non, à graduer des portions de droite de manière compatible entre elles, à utiliser une graduation (en 1/2, 1/3, 1/4, 1/6) pour mesurer des longueurs.

Les mesures de longueurs sont alors réutilisées dans des calculs de distances sur des itinéraires et des calculs de périmètres de figures variées. A ce stade, les calculs additifs ou les comparaisons se font sans technique standard systématique, mais plutôt au gré des problèmes à résoudre :

[25] Op. cit. p. 17.

[26] Op. cit. p. 38.

4/5 < 5/6 parce que 4/5 = 1 - 1/5 et 5/6 = 1 - 1/6 et 1/6 < 1/5

3/7 < 5/8 parce que 3/7 < 1/2 < 5/8 [27]

Au chapitre 2, les rationnels sont utilisés pour coder des aires (codage et décodage), ce qui fait intervenir l'addition, la comparaison de rationnels et la multiplication par des entiers. Des feuilles de papier sont découpées en morceaux (puzzle), l'unité d'aire étant le feuille de papier elle-même. Par exemple :

> 6 x 1/6 = 1 , c'est le partage de l'unité en six parties de même aire.
> 4 x 1/6 = 4/6 = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6, il a fallu quatre parties d'aire 1/6 pour paver la surface.

Les égalités qui en découlent correspondent à un pavage effectif d'une feuille de papier.

> 1/2 + 1/3 + 1/6 + 1/6 = 1/2 + 1/3 + (2x1/6)
> = 1/2 + 1/3 + 1/3 = 1/2 + (2x1/3) = 1/2 + 2/3 [28]

Les fractions utilisées sont ensuite représentées sur une demi-droite graduée. Le chapitre 3 se situe entièrement dans le contexte de cette demi-droite. Le but est d'établir un lien entre la fraction et la division euclidienne, pour pouvoir plus tard lier fraction et division dans les décimaux, une fois qu'ils auront été introduits (approximation d'un rationnel par un décimal). Cette activité figure également dans la progression de Brousseau & Brousseau.

> Consigne : Une équipe (composée de 2 élèves E1, E2) choisit une fraction a/b comprise entre 0 et 100 et qui n'est pas égale à un nombre entier. Les autres joueurs (une autre équipe ou le reste de la classe), qui ne connaissent pas cette fraction doivent en au plus 10 questions, déterminer un intervalle dans lequel se trouve la fraction avec une erreur d'au plus une unité, c'est-à-dire situer le mieux possible la fraction entre deux entiers. On ne peut répondre aux questions que par oui ou par non.
>
> A la fin de la partie, tous les partenaires, au vu de la fraction, contrôlent l'encadrement trouvé. Ensuite on échange le rôle des équipes (dans le cas d'un jeu équipe contre équipe).
> Il s'agit de situer la fraction et non de la deviner.[29]

On peut penser que la consigne a été formulée aux élèves sous une forme plus accessible que celle indiquée dans la brochure. Les mots d'intervalle, d'erreur, d'encadrement ont-ils été effectivement prononcés en classe ? Il est vrai que l'axe gradué, hachuré au fur et à mesure des réponses des élèves, illustre implicitement ces notions. Les fractions de dénominateur 10, 100, 1000... sont faciles à situer.

Les situations suivantes proposent d'utiliser les rationnels pour résoudre des problèmes de proportionnalité.

> Au fur et à mesure que de nouvelles fractions apparaissent, on les fait intervenir dans des situations variées différentes de celles où elles ont été créées. De cette

27 Op. cit. p. 49.
28 Op. cit. p. 56.
29 Op. cit. p. 66.

> manière, les fractions vont pouvoir être décontextualisées et prendre le statut de nombre.(...) Il s'agit (...) d'utiliser les écritures fractionnaires pour traiter des relations de proportionnalité entre des quantités continues. Pour atteindre les objectifs décrits ci-dessus, il est important d'aborder ces situations du point de vue de l'étude d'une relation entre des quantités variables de façon à manipuler beaucoup de nombres (tableaux de valeurs) et non pas sous forme de problèmes fermés où il y a une seule réponse à une seule question. (...) L'utilisation des représentations graphiques apporte dans l'étude de ces situations un cadre supplémentaire qui fournit d'autres critères de reconnaissance de la proportionnalité et d'autres procédures de résolution : la représentation graphique suggère des solutions qu'il reste à contrôler par le calcul. [30]

Deux situations sont développées au chapitre 4 : la représentation d'un parcours à l'échelle, l'agrandissement d'un puzzle.

La représentation du parcours comporte deux étapes.

Dans la première étape, les élèves, par équipe, doivent représenter géométriquement une partie du parcours, les différentes parties se chevauchant et permettant ainsi de reconstituer la représentation complète. Cela oblige les élèves à prendre conscience de l'importance de l'échelle (des points de repère réguliers ont été placés sur le parcours réel, tous les 40 mètres pour certaines équipes, et tous les 50 mètres pour les autres).

Dans une deuxième étape, les élèves doivent faire placer, par un jeu de message sans dessin, sur la représentation d'une autre équipe, des points qu'ils ont déterminés eux-mêmes sur leur représentation. Le groupe émetteur ignore l'échelle du récepteur.

Plusieurs cadres sont en jeu :
- le cadre de la course effective faite par les enfants,
- celui du dessin qui représente le parcours,
- le cadre numérique,
- le cadre de la représentation symbolique (graphique), si les élèves ont une bonne maîtrise des fonctions linéaires et des représentations graphiques.

Les élèves doivent trouver un moyen de désigner une position d'un point par rapport à d'autres. Au besoin l'enseignant oblige à ne pas prendre de points dans des positions privilégiées (milieux) de façon à inciter les élèves à recourir au modèle proportionnel.

Les nouveaux nombres apparaissent comme multiplicateurs, et permettent de définir ce qu'est une échelle.

> <u>Institutionnalisation</u>
> Sur une représentation, les distances sont proportionnelles aux distances réelles : si on connait un couple (distance réelle, distance sur la représentation), on peut déterminer tous les autres ; en particulier, si on sait que 1 m est représenté par d cm, alors pour n'importe quelle distance *x* mesurée en m, la longueur correspondante sur la représentation est d X *x* cm [31].

---

30 Op. cit. p. 87.

31 Le choix de typographie fait pour la brochure n'est pas très heureux : multiplication désignée par X, et inconnue désignée par *x*.

De même si 1 m est représenté par a m = d X 0,01 m, alors pour n'importe quelle distance x mesurée en m, la longueur correspondante sur la représentation est a X x m = d X 0,01 X x m.

En prenant pour unité le mètre, la distance sur la représentation se calcule à partir de la distance réelle par la relation x ---> a X x = d X 0,01 X x.
1 m est représenté par d cm, donc
1 cm est représenté par d X 0,01 cm = a cm

En prenant pour unité le centimètre, la distance sur la représentation se calcule à partir de la distance réelle par la relation x ---> a X x = d X 0,01 X x.

Plus généralement, on admet que le nombre a ne dépend pas de l'unité de longueur choisie pourvu qu'on prenne la même au départ et à l'arrivée. On l'appelle échelle de la représentation.

Si on a des représentations d'un même parcours à des échelles différentes, a et b, les distances sur une représentation sont proportionnelles aux distances sur l'autre ; la relation est caractérisée par le couple (a,b) [ou (b,a) selon le cas]. [32]

L'entraînement qui suit propose de changer les unités de longueur, ou de changer l'échelle (passage de la réalité à la représentation ou l'inverse, passage d'une représentation à une autre).

La deuxième activité-phare du chapitre porte sur l'agrandissement d'un puzzle, reprise de la situation déjà étudiée par Brousseau : un puzzle est fourni, différents agrandissements sont proposés aux élèves, par une dimension sur le puzzle initial et la dimension correspondante sur le puzzle agrandi.

Consigne : Vous allez fabriquer des puzzles de même forme que le modèle affiché au tableau mais de tailles différentes (plus grands ou plus petits). (...)

Pour fabriquer votre pièce, on vous donne une des dimensions du nouveau puzzle.

Puzzle initial	rouge	vert	bleu	jaune
l = 12,5 cm	l = 25 cm	l = 10 cm	l = 6,25 cm	l = 20 cm [33]

Les auteurs expliquent l'importance du choix des valeurs numériques pour qu'apparaissent des multiplicateurs (doubles ou moitié) au côté de procédures additives qui déforment la figure. Les déformations dépendent de la forme des pièces : une analyse détaillée est fournie (p. 93 à 95). Cette situation permet donc de rejeter le modèle additif, elle permet en outre de trouver les dimensions nouvelles par procédures "scalaires" :

A ce stade, une intervention du maître peut être nécessaire pour faire repartir les élèves de ce dont ils sont sûrs. Par exemple avec la consigne 12 ---> 15, les élèves sont sûrs que chaque fois qu'on a 12 cm, il doit lui correspondre 15 cm. Il s'agit alors d'enrichir le stock des couples (a,b) dont on est sûr que b correspond à a. Par exemple :
12 -----> 15
6 -----> 7,5
24 -----> 30
30 -----> 37,5
18 -----> 22,5 etc.

[32] Op. cit. p. 86.
[33] Op. cit. p. 91.

Cet enrichissement peut conduire des élèves qui ont déjà travaillé avec la fonction linéaire à reconnaître qu'une telle fonction est à l'œuvre ici et qu'il s'agit de chercher l'image de 1 pour déterminer la fonction, ou au moins les engager dans une nouvelle procédure.

Si les élèves ont une pratique de la représentation graphique, ils disposent alors d'assez de couples à reporter graphiquement. Le graphique (points alignés) peut leur permettre de reconnaître la fonction linéaire et leur donner le moyen de déterminer de nouveaux couples sans rechercher l'image de 1.[34]

Dans la situation du puzzle, il n'y a pas de recherche explicite de l'échelle d'agrandissement ou de réduction. Le bilan indiqué parle "d'institutionnaliser le modèle linéaire comme modèle pertinent dans les agrandissements ou réductions" (p 102).

Remarquons que, dans les deux situations du parcours à l'échelle et de l'agrandissement du puzzle, les nouveaux nombres sont écrits sous forme décimale et non fractionnaire : ces deux situations-phares utilisent une connaissance commune, "sociale", des nombres décimaux, quand ils représentent des mesures de longueurs, ce qui leur permet de calculer des "moitiés" de longueurs (agrandissement du puzzle). Par ailleurs, ces nouveaux nombres désignent aussi des multiplicateurs pour le parcours à l'échelle, mais les deux points de vue (multiplicateurs, mesures) ne sont pas présents en même temps. Il n'y a pas d'entraînement explicite prévu sur le passage "image de 1" ----> multiplicateur ou l'inverse, ce qui est cohérent avec la volonté des auteurs de conserver aux fonctions linéaires leur aspect "outil"[35].

3.3- Aire de rectangles et multiplication "interne" des rationnels

Les quatre derniers chapitres présentent une grande unité thématique : on y trouve systématiquement développées les relations entre dimensions, périmètre et aire de rectangles, exprimées à la fois par des écritures algébriques et des représentations graphiques. C'est par ce biais que la multiplication des rationnels trouvera du sens : aire d'un rectangle dont les dimensions sont exprimées sous forme rationnelle. La recherche des dimensions d'un carré d'aire donnée donnera du sens à l'utilisation des fractions décimales (valeur approchée). La notation décimale sera introduite après que les élèves ont observé les propriétés des calculs sur les fractions décimales. La liaison avec la droite numérique se fera par recherche de la valeur approchée d'un rationnel.

Reprenons ces chapitres plus en détail.

Le chapitre 5 traite des relations entre dimensions, périmètre et aire d'un rectangle.

Les élèves doivent dessiner 4 ou 5 rectangles dont une dimension est fournie (toujours la même au sein d'une même équipe). Exemples : $a = 5$, $a = 7$, $a = 3 + 1/2$, $a = 8 + 1/2$, $a = 2 + 3/4$, $a = 4 + 6/10$. Ils doivent ensuite calculer l'aire et le périmètre de chaque rectangle, organiser les informations en un tableau, puis sur des graphiques (x étant l'autre dimension du rectangle, y étant soit l'aire soit le périmètre). Une fois les graphiques constitués, la question est posée de trouver dans la famille des rectangles un rectangle d'aire 20 cm^2, 25 cm^2... (p. 114), un rectangle de périmètre 25 cm, 32 cm ... (p. 116).

[34] Op. cit. p 101.

[35] La brochure renvoie à un autre document qui traite de la proportionnalité.

Le but de ce travail est de faire jouer à la représentation graphique un double rôle : recueil et organisation de l'information, source d'information nouvelle en donnant du sens à de nouveaux points intermédiaires.

La superposition des différents graphiques met en évidence deux propriétés :
- pour l'aire, les points obtenus s'alignent sur une droite qui passe par l'origine : l'aire est proportionnelle à la dimension variable du rectangle,
- pour le périmètre, les points obtenus s'alignent sur une droite qui ne passe pas par l'origine, mais les droites sont toutes parallèles.

Le recherche de rectangles de périmètre donné incite les élèves à produire des rectangles dont les deux dimensions sont non entières. On leur demande de représenter les aires sur un graphique : les élèves ont l'intuition (grâce au graphique) que l'aire est maximum pour le carré.

Pour calculer l'aire, les élèves font référence au pavage.

> Si les deux dimensions sont fractionnaires, le rectangle est coupé en 4 parties dont on sait calculer l'aire pour 3 d'entre elles. On peut déterminer l'aire de la 4ème partie par référence au pavage. Et l'aire du rectangle est la somme des aires des quatre parties. Finalement la connaissance des dimensions détermine l'aire du rectangle. Par convention, le produit de 2 nombres fractionnaires a et b est la mesure de l'aire du rectangle de dimensions (a,b) en prenant des unités de longueur et d'aires adaptées.
>
> Exemple : a = 4 + 7/10 b = 5 + 1/2

5 x 4 = 20	4 x 1/2 = 2
5 x 7/10 = 35/10 ou 3 + 5/10	?

> Il reste à calculer l'aire du rectangle R de dimensions 7/10 u et 1/2 u.
>
> Le rectangle de dimensions 7/10 u et 1/2 u est composé de 7 petits rectangles r de dimensions 1/10 u et 1/2 u. L'aire du petit rectangle r est donc 1/20 c, l'aire du rectangle R est 7 x 1/20 c = 7/20 c.
>
> Finalement la mesure de l'aire cherchée est :
>
> (4 + 7/10) x (5 + 1/2) = 20 + 2 + 3 + 5/10 + 7/20 =
> 25 + 10/20 + 7/20 = 25 + 17/20 [36]

Cette disposition est reprise en tant que technique de calcul de produit de rationnels (écrits sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1).

[36] Op. cit. p. 113

L'activité suivante introduit le travail d'approximation. Chaque élève dispose d'une feuille de papier quadrillé.

> Consigne : Vous tracez des axes et vous les graduez (1 gros carreau pour une unité). Chaque point (x,y) du quadrillage représente un rectangle de dimensions x cm et y cm. Vous allez colorier tous les points du quadrillage avec la consigne suivante :
> - si l'aire du rectangle est supérieure à 24 cm^2, vous marquez un point rouge,
> - si l'aire du rectangle est inférieure à 24 cm^2, vous marquez un point bleu,
> - si l'aire du rectangle est égale à 24 cm^2, vous marquez un point noir.[37]

Comme il y a beaucoup de points à colorier, les élèves recherchent des procédés économiques : croissance de l'aire pour une dimension fixe et l'autre variable (balayage horizontal et vertical) ; monotonie implicite pour les fractions par rapport aux entiers ; continuité (la valeur intermédiaire). La situation évolue vers la recherche systématique des points noirs (frontière), par le calcul, de manière approchée, ou par le dessin. Par exemple :

> (4 + 1/2) x (5 + 1/2) trop grand
> (4 + 1/2) x (5 + 1/4) trop petit
> (4 + 1/2) x (5 + 1/3) = 24 (...)
>
> "Je coupe en deux [le rectangle 3 x 8], je mets les deux rectangles bout à bout [16 x (1 + 1/2)] et je recommence." [38]

24/a prend alors une nouvelle signification : ce n'est plus seulement 24 x 1/a, c'est la solution de l'équation a. x = 24 [39]

> C'est la mesure en cm d'une des dimensions d'un rectangle d'aire 24 cm^2 et dont l'autre dimension est a cm, ce qui se traduit dans le cadre numérique par :
> 24/a est le nombre qui, multiplié par a, donne 24.[40]

Le chapitre suivant s'appuie sur le même contexte : aires de rectangles, graphiques avec "points noirs" associés aux rectangles d'aire fixée. Le problème central est la recherche de carrés d'aire aussi proche que possible d'un nombre fixé. Les élèves sont amenés à observer que les calculs sont plus faciles à faire avec des fractions décimales, même si les écritures sont lourdes (p. 149 et 152). C'est d'ailleurs de cette lourdeur d'écriture que sortira l'avantage de la notation décimale.

Tout le chapitre 7 porte sur la transposition des algorithmes de calcul, des fractions décimales aux décimaux. C'est après ce chapitre que sont traités les exercices de la fin du chapitre 3 sur la recherche de valeurs approchées décimales d'un rationnel et la liaison avec la division dans les décimaux.

La brochure s'achève sur la résolution d'un problème d'approximation, toujours dans le même contexte.

---

37 Op. cit. p. 131.

38 Op. cit. p. 136 et 138.

39 Notation de la page 139.

40 Op. cit. p. 139.

a) Chercher des rectangles de périmètre 52 cm. Pour chacun calculer son aire en cm^2. Rassembler les résultats dans un tableau.

b) Représenter graphiquement les couples (a,b) obtenus. A côté de chaque couple, indiquer la valeur de l'aire correspondante.

c) Représenter graphiquement les couples (a, A). (...)
Parmi les rectangles de périmètre 52 cm, y en a-t-il un d'aire 95 cm^2 ? [41]

Les élèves utilisent différents procédés : essais uniquement sur des entiers, calculs désordonnés avec des nombres décimaux, recherche de la variation en augmentant ou diminuant la longueur (ou la largeur), encadrements à partir d'un rectangle ayant une aire trop grande et d'un rectangle ayant une aire trop petite.

Des variantes sont proposées dans le même contexte (autres valeurs de périmètres et d'aire).

3.4- Les caractéristiques de la progression Douady & Perrin

Donnons quelques caractéristiques de la brochure Douady & Perrin. La première partie décrit les options. La deuxième partie décrit à la fois les choix de recherche pour la conception des séquences pédagogiques et les séquences elles-mêmes. La chronologie des séquences est presque partout respectée. Le traitement des séquences varie, certaines étant développées et d'autres résumées (par exemple, la brochure renvoie à d'autres documents sur la proportionnalité). Les consignes sont souvent indiquées avec un niveau de langage adapté à des élèves de fin d'école primaire, on en rencontre d'autres dont la formulation correspond au niveau de langage du lecteur enseignant.

Illustrons maintenant la progression Douady & Perrin par un schéma.

[41] Op. cit. p. 171 et 172.

Longueur mesurée par partage de l'unité.
1/6 tel que
1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1
ou encore 6 x 1/6 = 1
4/6 = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6.

Additivité des longueurs.

Extension aux aires.
Codage et décodage.
Comparaison à l'unité.

La demi-droite numérique : longueurs et positions.
Encadrement de rationnels par des entiers.
Liaison avec la division euclidienne.

Résolution de problèmes linéaires : représentation d'un parcours à l'échelle, l'agrandissement du puzzle.
Rationnels "outils" (mesures, multiplicateurs).

Aires et périmètres de rectangles.
Graphiques associés.
Trouver un rectangle d'aire donnée, de périmètre donné.
Produit de rationnels.

↓

Régionnement d'un graphique. Points "frontières" et approximation.
Fractions décimales.
Notation décimale, calculs associés.

↓

Recherche par approximation d'un rectangle de périmètre et d'aire fixés.

On peut caractériser la progression adoptée par Douady & Perrin de la manière suivante.

- Les problèmes qui évoquent des grandeurs sont traités au fur et à mesure que s'enrichissent les écritures formelles. Les seules grandeurs donnant lieu à des développements sont la longueur et l'aire, le renvoi étant fait à une autre brochure sur la proportionnalité. Il n'y a pas d'entraînement au calcul sur les mesures de grandeurs familières.
- L'addition et la comparaison de rationnels s'appuient sur l'additivité des longueurs et celle des aires.
- Dans les situations de proportionnalité, les rationnels sont des "outils" pour désigner des mesures ou des multiplicateurs, les deux aspects n'étant pas présents en même temps.
- La multiplication des rationnels est "interne" : elle est basée sur le calcul de l'aire du rectangle en fonction de ses deux dimensions.

- Les fractions décimales sont introduites pour résoudre de manière approchée un problème d'aire. La notation décimale vient alléger les calculs.
- La demi-droite numérique et les graphiques constituent les principaux registres sémiotiques. Les graphiques jouent un rôle central dans la construction du sens de l'approximation. On trouve quelques schémas avec flèches.
- L'approximation est abordée exclusivement dans le cadre des mathématiques : graphique ou calcul.

Situons maintenant la progression Douady & Perrin par rapport aux programmes officiels de fin d'école primaire et de début de collège.

- La progression s'appuie sur des résolutions de problèmes, les méthodes préconisées par les textes officiels sont respectées.
- A part la longueur, les grandeurs familières ne sont pas présentes.
- Contrairement à la progression des textes officiels, mais comme chez Brousseau & Brousseau, les rationnels sont introduits avant les décimaux. Les aspects additifs des nouveaux nombres sont traités avant leurs aspects multiplicatifs, ce qui est contraire à la progression du collège qui introduit d'abord les quotients de décimaux avant l'étude de la somme de rationnels.
- Les questions d'approximation sont liées à la recherche de solutions approchées de problèmes multiplicatifs, problèmes représentés graphiquement, (fonctions comme "outils"). L'approximation ne renvoie pas ici à un calcul approché, "en gros", mais au procédé mathématique qui permet de définir un réel comme limite d'une suite décimale. Outre l'emploi d'un vocabulaire non inscrit dans les textes officiels (en particulier intervalle), la richesse et la complexité des situations proposées paraissent peu compatibles avec les interprétations habituelles des textes officiels.

4- Comparaison des deux progressions de référence

4.1- Similitudes

Les deux progressions de référence ont des aspects communs.

Nous avons déjà vu qu'elles proposaient des méthodes de travail analogues, qui ont été reprises dans les recommandations officielles qui ont suivi : partir de résolution de problèmes.

Les deux progressions s'écartent des textes officiels puisqu'elles introduisent les rationnels avant les décimaux (désignation de mesures de grandeurs par partage de l'unité ou commensuration) et étudient les propriétés additives de ces nouveaux nombres avant leurs propriétés multiplicatives.

Elles recourent à des questions d'approximation pour introduire les nombres décimaux, avec pour support la demi-droite numérique pour Brousseau & Brousseau et les graphiques pour Douady & Perrin.

4.2- Différences de traitement

Les progressions présentent des différences dans le traitement des notions.

La situation d'introduction de la multiplication des rationnels n'est pas de même nature dans les deux progressions.

Dans la progression Brousseau & Brousseau, la multiplication est d'abord externe (produit d'une mesure par une fonction linéaire), puis interne (composition de deux fonctions linéaires). Les fonctions linéaires sont représentées par des schémas avec flèches, le multiplicateur est désigné sous différentes formes (rationnel, composition d'opérateurs, image de l'unité). On ne voit aucun graphique.

Dans la progression Douady & Perrin, la multiplication des rationnels est issue du calcul de l'aire du rectangle à partir de ses dimensions. La quasi totalité des fonctions linéaires utilisées est représentée par des graphiques, il n'y a pas de désignation systématique du multiplicateur sous forme rationnelle.

La progression Brousseau & Brousseau étudie les rapports entre division par un entier et multiplication par un rationnel, les rapports partie/tout, ce que l'on ne trouve pas dans la progression Douady & Perrin, qui renvoie à la brochure sur la proportionnalité.

La progression Brousseau & Brousseau inclut l'étude de décimaux liés aux grandeurs familières. Certaines grandeurs sont effectivement mesurées ou fabriquées (masses, capacités). La progression Douady & Perrin n'inclut pas d'étude de grandeurs familières (sauf la longueur). Les seules grandeurs sur lesquelles un travail effectif est fait sont les longueurs et les aires.

L'étude des décimaux et des rationnels est conduite de front dans la progression Brousseau & Brousseau. Les décimaux apparaissent comme une simplification des calculs faits sur les fractions décimales.

Les différences entre les points de vue physiques (mesurer), technologiques (fabriquer) et mathématiques (calculer) sont présentes dans la progression Brousseau & Brousseau. La progression Douady & Perrin se situe à l'intérieur des mathématiques.

Les registres sémiotiques dominants de la progression Brousseau & Brousseau sont les schémas avec flèches. Ceux de la progression Douady & Perrin sont les graphiques de fonction.

Le ressort principal de la progression Brousseau & Brousseau est l'étude des fonctions linéaires. Celui de la progression Douady & Perrin est l'étude de points frontières dans des représentations graphiques et les approximations correspondantes.

Résumons ces différences et ressemblances en un tableau.

	Brousseau & Brousseau	Douady & Perrin
Introduction par des problèmes	Oui	Oui
Grandeurs effectives	Longueurs, épaisseurs, masses, capacités	Longueurs, aires
Calculs sur des mesures de grandeurs familières	Oui	Non (sauf longueurs)
Rationnels introduits comme mesures	Commensuration, partage de l'unité	Partage de l'unité
Addition, comparaison	Additivité des grandeurs	Additivité des grandeurs
Multiplication de deux rationnels	Produit d'une mesure par une application linéaire Composition d'applications linéaires	Aire comme produit de longueurs
Registres sémiotiques	Schémas avec flèches	Graphiques
Division par un entier et multiplication par un rationnel	Oui	Non
Rapport partie/tout	Oui	Non
Décimaux comme solution approchée	Oui	Oui
Différence entre calculer une mesure et la mesurer	Oui	Non

4.3- Différences d'écriture

Les deux brochures ne sont pas rédigées de la même manière.

La brochure Brousseau & Brousseau est très détaillée. Les consignes figurent sous une forme qui peut être reprise dans un cadre scolaire. La succession des modules est chronologique et se présente comme complète. Le plan de chaque leçon est systématique, les comportements des élèves sont décrits souvent de manière détaillée. En voici un exemple à propos de l'agrandissement du puzzle :

> 1) Une fillette ayant bien trouvé l'image de 1 a fait ensuite tous les calculs en utilisant non 1,75 mais 1,7. A la question de l'enseignant :
> "Mais pourquoi as-tu multiplié par 1,7 alors que tu as trouvé 1,75 ?", elle a répondu :
> "Parce que je ne peux pas mesurer 1,75 cm avec mon double-décimètre puisque ça ne va pas jusqu'aux millimètres".
> Les autres enfants étant immédiatement intervenus pour protester en disant que "c'était possible, avec un crayon bien pointu on peut repérer à peu près le milieu d'entre deux millimètres", la fillette, convaincue, n'a pas réalisé le puzzle avec les mesures qu'elle avait trouvées. Elle n'a donc pas pu se rendre compte de l'inexactitude de ses résultats.

2) Pour beaucoup d'enfants, mesurer 2,25 cm ; 15,75 cm représente effectivement une difficulté importante dont l'enseignant ne se rend pas toujours compte mais qu'il doit prendre en considération.[42]

Les remarques à caractère pédagogique suivent immédiatement les descriptions des résultats des élèves. Par exemple, à propos de la somme d'épaisseurs de feuilles de papier :

> Proposer à ce moment-là des sommes de fractions à même dénominateur serait une erreur didactique.
> Certains maîtres ont été tentés de la faire avec l'espoir d'obtenir immédiatement une réussite d'ensemble. Ils veulent éviter aux élèves la double difficulté d'avoir à décider de réduire au même nombre de feuilles et de le faire pour que la somme des numérateurs, c'est-à-dire les épaisseurs, ait un sens. Cela permet aux enfants des justifications faciles à formuler et à apprendre, cela facilite l'apprentissage formel de la somme de deux fractions (...). Mais cette méthode donne de moins bons résultats : seuls les enfants capables d'emblée de concevoir le cas général et les raisons de la facilité apparente des cas particuliers ont franchi la difficulté en développant une conception correcte de ce qu'est la somme de deux fractions. [43]

La brochure Douady & Perrin est plus restreinte en nombre de pages. Elle renvoie à d'autres brochures pour l'étude des aires et longueurs, de la proportionnalité. La progression présente quelques ruptures de chronologie (par exemple l'approximation d'un rationnel par des fractions décimales). Les consignes se présentent souvent sous une forme générale qui ne correspond pas au discours que formulerait l'enseignant en classe.

La description des séquences d'enseignement adopte un plan proche de celui qu'adopterait un chercheur pour rendre compte de ses travaux et le style en est souvent intemporel. Une réflexion systématique est faite sur l'importance du choix des variables didactiques. Par exemple à propos de l'agrandissement et la réduction d'un puzzle :

> Le puzzle est constitué de pièces ayant une forme géométrique qu'on puisse construire avec les instruments habituels de géométrie. L'important est :
> * qu'il y ait des triangles et des trapèzes,
> * qu'il y ait des angles droits et d'autres qui ne le soient pas,
> * qu'un côté d'une pièce coïncide avec la somme de deux autres, ou qu'un côté soit double d'un autre,
> * que sur les bords parallèles du puzzle, il n'y ait pas le même nombre de pièces. [44]

En résumé, nous pourrions dire que la brochure Brousseau & Brousseau est plus facile à lire, car elle suit pas-à-pas le déroulement chronologique et décrit, séance après séance, les comportements des élèves, les résultats obtenus, les points pédagogiques délicats. C'est un atout pour une éventuelle utilisation, mais le nombre de séances à consacrer à l'étude des décimaux peut être rebutant.

La brochure Douady & Perrin explicite systématiquement les ressorts didactiques de certaines situations, quitte à en résumer d'autres. Elle fournit des éléments de choix de variables didactiques,

---

[42] Op. cit. p. 143.
[43] Op. cit. p. 22.
[44] Op. cit. p. 89.

indique les comportements possibles des élèves. Pour appliquer les propositions de la brochure, les enseignants doivent faire un travail de reformulation, et choisir les valeurs des variables didactiques pertinentes pour leur propre progression. La progression laisse plus de liberté à l'enseignant, mais exige plus de travail personnel de réappropriation.

5- Des hypothèses sur les difficultés à réutiliser l'une ou l'autre des progressions

Nous connaissions l'intérêt de ces deux progressions de référence : elles ont été répétées plusieurs années de suite, elles ont été construites dans une perspective de scolarité obligatoire (liaison école-collège). Bien qu'en partie non conformes aux textes officiels (organisation temporelle des contenus), elles nous fournissent un répertoire de problèmes que l'on peut associer aux décimaux ou plus largement aux rationnels : fonctions numériques, proportionnalité, calculs sur grandeurs familières, "mesurage". Elles s'appuient sur des registres sémiotiques comme la droite numérique, les tableaux de nombres, les graphiques, les schémas avec flèches.

On pourrait être tenté de choisir, pour des raisons mathématiques, entre la progression Brousseau & Brousseau et la progression Douady & Perrin : donner la priorité à la multiplication externe des rationnels et au rapport entre mathématiques et grandeurs physiques (Brousseau & Brousseau), ou à l'opposé, préférer la multiplication interne des rationnels et construire les nouveaux nombres dans le cadre exclusif des mathématiques (Douady & Perrin). En l'absence d'études sur le suivi des élèves des classes expérimentales, ce choix parait peu fondé. De plus, choisir un camp serait décréter a priori qu'une catégorie de problèmes serait exclue du champ de l'enseignement mathématique : l'éducation mathématique perdrait alors de sa richesse. On pourrait, au contraire, imaginer une progression sur quatre ans (CM1, CM2, sixième, cinquième) qui partirait de l'une des progressions et s'achèverait par les problèmes de l'autre progression.

A priori, nous pensons que ce n'est pas pour ces raisons que les enseignants d'école primaire ou de collège décident d'utiliser ou non, en totalité ou en partie, l'une ou l'autre des progressions. Notre expérience de formation nous conduit à émettre d'autres hypothèses.

- La brochure Douady & Perrin est rédigée selon un plan très différent de ce que l'on rencontre dans les guides du maître : l'organisation pratique d'une séquence est le plus souvent à reconstruire[45]. Elle traite certaines séquences de manière résumée. La brochure Brousseau & Brousseau, de ce point de vue, est plus facile à lire, plus proche de l'exercice du métier d'enseignant, et traite les séquences de manière identique du début à la fin de la brochure.
- Bien peu d'enseignants bouleversent de fond en comble leur plan de cours : ils préfèrent ne pas prendre trop de risques et en modifier des parties limitées. Les brochures de présentation des progressions de référence ne sont pas rédigées pour être reprises par morceau.
- Les deux progressions présentent des écarts avec les programmes officiels. Cet argument sera à relativiser, car l'histoire récente de l'école primaire montre que les enseignants prennent facilement des libertés avec le cadre réglementaire quand ils suivent un manuel : l'époque des "mathématiques modernes" en fournit beaucoup d'exemples.

45 Voir Kuzniak, A (1994), op. cit.

- Les registres sémiotiques sur lesquels s'appuient les deux progressions (graphiques, schémas avec flèches) ne font pas partie du répertoire habituel des cours de mathématiques de fin d'école primaire et de début de collège.
- L'approximation est, en général, un instrument permettant de vérifier des calculs et non un outil pour résoudre des problèmes.
- Les grandeurs du programme (essentiellement longueurs, aires, volumes) sont traitées exclusivement d'un point de vue mathématique, les conflits entre points de vue physiques, technologiques et mathématiques ne sont pas considérés à ce niveau comme relevant des cours de mathématiques [46].
- Dans l'enseignement du second degré, il est de tradition d'étudier les propriétés des nombres pour elles-mêmes ; les notions nouvelles interviennent comme objet avant d'être outil. Or c'est l'inverse que proposent les deux progressions que nous avons prises pour référence.
- La pédagogie de résolution de problèmes n'est pas facile à mettre en œuvre. Elle suppose de la part de l'enseignant de savoir jouer sur plusieurs modalités d'interventions : encouragement "neutre" dans les périodes de recherche, accueil "neutre" dans les périodes de débat, puis progressivement aide à la structuration, mise en cause des procédés non efficaces (choix de bons contre-exemples), mise en place de règles dont le respect est imposé, exercices d'entraînement. C'est aussi une pédagogie lente dont l'échelle de temps n'est jamais la journée mais plutôt de l'ordre de la semaine, alors que les méthodes habituelles, "impositives", s'organisent sur un temps plus court.

Ces hypothèses nous serviront de guide pour l'analyse des manuels de CM1 et de sixième.

46 Ces interférences sont souvent source d'incompréhension de consignes : voir par exemple le film de Belouze, B., Bousey, E. & Chazet, B. (1981) , *La boîte à problèmes* (CNDP), ou le film de Peltier, M.L.(1989), *La boîte du pâtissier* (École normale de Rouen). Voir aussi Berthelot, R, & Salin, M.H. (1992) op. cit..

Chapitre IV

ÉTUDE COMPARATIVE DE QUELQUES MANUELS (CM1, SIXIÈME)

Les manuels scolaires sont des auxiliaires de l'enseignement : ils fournissent une interprétation des textes officiels, une "mise en scène" du savoir[1].

Les contraintes qui pèsent sur la rédaction d'un manuel ne sont pas de même nature que celles qui incombent à une recherche. Les auteurs de manuels doivent respecter des règles fixées par les éditeurs : nombre de pages, organisation de l'ouvrage, conformité aux textes officiels, voire ton général. Ils ne peuvent introduire d'innovations que de manière réduite, la majorité des éditeurs disposant de lecteurs dont l'avis conditionne l'acceptation du manuscrit. Une innovation trop éloignée des pratiques du milieu risque de conduire à l'échec commercial, ce que ni l'éditeur ni l'auteur ne souhaitent.

L'étude des manuels révèle indirectement les innovations que le milieu enseignant est globalement prêt à accepter.

1- Position du problème

1.1- Un choix restreint de manuels

Nous avons choisi de travailler sur des manuels *récents*. En effet, il est généralement admis qu'une période de latence d'au moins cinq ans sépare des propositions innovantes de leur reprise "spontanée" dans des manuels scolaires. Les manuels que nous avons retenus ont été publiés en 1991, 1993 et 1994, c'est-à-dire plus de dix ans après la publication des premiers travaux de recherche de Brousseau et Douady & Perrin, plus de quatre ans après les publications des brochures décrivant les progressions de référence.

Nous avons choisi d'examiner un nombre *limité* de manuels. Il ne nous a pas semblé utile, dans un premier temps, d'analyser en détail tous les manuels du CM1 à la sixième parus après la publication des deux brochures de référence : une consultation rapide nous a permis de constater l'absence de points communs entre nos progressions de référence et celles de bon nombre de manuels, chaque fois que les options pédagogiques de leurs auteurs diffèrent de celles des équipes de recherche en didactique des mathématiques. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes restreint à l'étude détaillée de quelques manuels dont les auteurs sont diplômés en didactique des mathématiques ou ont fréquenté des rencontres, colloques etc., au cours desquels sont intervenus des chercheurs en didactique. Il est raisonnable de penser qu'ils connaissaient les travaux de Brousseau, Douady & Perrin avant d'écrire leur manuel.

1 TAVIGNOT, P. (1991) *L'analyse du processus de transposition didactique - Exemple de la symétrie orthogonale au collège,* Thèse de sciences de l'éducation, Université René Descartes Paris V, Paris.

Nous avons choisi deux niveaux : *le CM1 et la sixième.* C'est en CM1 que démarre l'enseignement des nombres décimaux : les situations d'introduction et leurs commentaires dans le livre du maître révéleront les savoirs antérieurs sur lesquels repose la dynamique de la progression. En sixième, la reprise des savoirs enseignés à l'école primaire donnera un éclairage sur la différence de point de vue entre l'école et le collège. Ce faisant, nous prenons le risque de tronquer la progression que les auteurs ont établie sur les deux niveaux successifs (CM1 et CM2 d'une part, sixième et cinquième d'autre part) : nous pouvons constater des absences qui ne concerneraient qu'un seul niveau. Nous risquons d'en conclure, à tort, que les auteurs de manuels n'ont pas repris certains éléments des progressions de référence. Notre dispositif de scénarios pédagogiques permet de remédier à cet inconvénient : en effet, les éléments que nous jugeons importants figurent dans ces scénarios, et leur expérimentation nous permettra de savoir ce que les enseignants reprennent à leur compte.

Nous faisons l'hypothèse que les auteurs de manuels réalisent un compromis entre leurs options personnelles et les pratiques du milieu, compromis que leur éditeur a jugé acceptable commercialement. L'analyse des manuels sera conduite de la même manière que celle des progressions de référence. Nous y adjoindrons l'examen de l'utilisation de la calculatrice, car elle est inscrite maintenant dans les programmes officiels. Nous dégagerons ensuite les stabilités et les variantes que ces manuels révèlent à propos de l'enseignement des décimaux.

1.2- Liberté des utilisateurs de manuels

Les manuels induisent-ils un comportement enseignant ? Il est généralement admis que la réponse diffère, suivant qu'il s'agit de l'école primaire ou du collège.

A l'école primaire, les enseignants, en majorité non spécialistes de mathématiques, se fient à la progression proposée par le manuel : peu d'entre eux jonglent avec plusieurs collections. Les manuels de l'école primaire présentent les seuls exercices jugés nécessaires, le livre du maître donnant des éclairages pédagogiques et suggérant quelques compléments. On peut supposer que les progressions adoptées effectivement dans les classes primaires sont proches de celles décrites dans les manuels.

Au collège, les enseignants sont spécialistes en mathématiques. Des contacts informels avec des enseignants de ce niveau montrent que le respect de la progression du manuel est beaucoup moins fort qu'à l'école primaire. Les enseignants de collège se réfèrent au manuel comme source d'énoncés d'exercices, comme recueil de résultats ou théorèmes. Chaque enseignant reconstruit un déroulement pédagogique de séquences selon ses options propres, qui peuvent être parfois différentes de celles des auteurs de manuels.

Dans les manuels de collège, la partie donnée en cours constitue un catalogue de résultats ; la part des exercices et problèmes de fin de chapitre est beaucoup plus développée qu'à l'école primaire, le professeur choisissant parmi ces exercices ceux qu'il veut faire chercher. Il n'y a pas de livre du maître, au sens de l'école primaire.

Il nous est plus difficile d'interpréter un manuel de collège qu'un manuel de l'école primaire. Nous faisons toutefois l'hypothèse que la partie "cours" fait ressortir les éléments jugés les plus importants par les auteurs, que la succession des paragraphes de cette partie dépend de leurs conceptions pédagogiques. Nous baserons notre étude sur cette partie et non pas sur les exercices et problèmes proposés en fin de chapitre.

2- *Atout math,* CM1, Hachette, 1993

L'analyse du manuel *Atout math* sera basée sur le livre de l'élève (*LdE*) paru en 1993, et le livre du maître (*LdM*) paru en 1994.[2]

Les auteurs, S. Christophe, S. Gorlier, G. Perrot, A. Ragot, travaillent en institut universitaire de formation des maîtres (IUFM) : ils ont été associés à plusieurs recherches dans le cadre de l'institut national de recherche pédagogique (INRP).

2.1- Les auteurs et la didactique des mathématiques

Les auteurs connaissent les travaux en didactique : ils les évoquent dès les premières pages :

> Les travaux des didacticiens ont permis d'établir que la construction, chez un élève, d'un champ conceptuel comme, par exemple, celui des structures additives, s'effectue sur plusieurs années (cf. les travaux de G. Vergnaud). [3]

L'apprentissage des décimaux et des fractions fait l'objet d'un développement important dans le livre du maître (p. 47 à 52). Les auteurs y présentent les conflits d'apprentissage entre entiers naturels et décimaux : ils donnent une liste des erreurs classiques sur les nombres décimaux. Ils citent des problèmes qui montrent l'insuffisance des entiers : mesurer des grandeurs continues, agrandir les dimensions d'une figure tout en respectant sa forme, partager une grandeur en un nombre fixé de parties identiques, trouver un carré dont la mesure du côté et celle de la diagonale soient des entiers. Il est visible que les auteurs connaissent les travaux de didactique des mathématiques sur les décimaux. D'ailleurs, des citations de R. Douady et de G. Brousseau illustrent la présentation générale "Enseignement et apprentissage des mathématiques" (*LdM* p. 8 à 13). Les principes pédagogiques annoncés se situent dans la perspective actuelle des recherches en didactique des mathématiques : les méthodes préconisées par les auteurs sont donc en cohérence avec les positions prises dans les brochures Brousseau & Brousseau, et Douady & Perrin.

2.2- Les choix des auteurs

Les auteurs connaissent plusieurs "voies" pour enseigner les décimaux. La première voie présentée, dite "historique", est celle qui passe des fractions aux fractions décimales, puis aux nombres décimaux, enfin aux nombres irrationnels. Dans la deuxième voie intitulée "système métrique", le nombre décimal est considéré comme une mesure qui, avec une autre unité, serait codée par un entier.

Pour les auteurs, le choix de leur voie doit résulter de l'examen de certains critères :

> Afin d'aider le lecteur à comparer ces diverses approches, nous lui proposons d'utiliser les critères suivants :
> . fréquence d'emploi, à l'école ou au collège,
> . facilité d'enseignement et d'apprentissage,
> . façon d'aborder les points cruciaux de la progression :
> - signification initiale donnée au nombre décimal,
> - équivalence d'écritures,
> - ordre,
> - sens et technique de +, -, x,
>
> . liens établis avec les concepts voisins, appartenant au même champ et susceptibles d'étayer l'apprentissage. [4]

[2] Le livre pour le CM2 n'a pas été publié.

[3] *LdM*, p. 2.

[4] *LdM*, p. 50.

En fait, les auteurs se bornent à évoquer les avantages ou désavantages principaux de chaque "voie". La "voie historique" est rejetée :

> Les fractions sont présentées à partir du partage d'un nombre entier, souvent en appui sur le mesurage. Stratégie d'enseignement dominante au début du siècle, elle a subi une longue éclipse au profit de la voie b) [système métrique]. Des travaux récents l'ont un peu sortie de l'oubli, mais elle reste peu répandue, car elle est exigeante : elle confronte les élèves à des difficultés importantes à propos des fractions, difficultés dont la maîtrise n'est exigible qu'en cinquième des collèges (ce qui ne veut pas dire inaccessible en CM). [5]

Les auteurs ne citent pas explicitement de qui sont les "travaux récents" : s'agit-il de Brousseau & Brousseau, de Douady & Perrin ? Les arguments en défaveur de cette voie ne sont pas développés : difficulté des élèves, non conformité aux programmes de l'école primaire. Les auteurs rejettent également la voie intitulée "système métrique", dont ils disent qu'elle est encore très répandue. La raison principale de leur réticence est l'impossibilité de travailler sur des nombres indépendamment des expressions de mesures.

Ils donnent leur préférence à deux voies qu'ils souhaitent développer en parallèle, la voie "demi-droite numérique" et la voie "fonctions".

La voie "demi-droite numérique" s'appuie sur l'idée-force de l'intercalation régulière.

> Naturels ----> graduation d'une demi-droite ----> intercalation ----> nombres décimaux <-----> fractions (avec variante : intercalation ----> fractions).
>
> Cette stratégie d'enseignement, grâce à une visualisation géométrique de l'ordre, offre un support très utile pour la compréhension et permet de soulever les questions relatives à l'équivalence : l'image qu'on tente de faire construire est celle d'une superposition à l'infini d'échelles graduées de plus en plus finement :
> - l'échelle des nombres entiers (1),
> - puis l'échelle au 1/10 (2) ,
> - puis l'échelle au 1/100 (3) etc. (...)
>
> Le plus souvent, l'appui se fait au départ sur un support déjà réglé, comme le papier millimétré, et il faut veiller à ne pas laisser s'installer chez l'élève la confusion (...) entre "dixième" et "dixième de centimètre". D'où la difficulté et l'importance d'exercices du genre :
>
> *Les nombres sont régulièrement espacés sur chacune de ces graduations. Places-y les nombres 4 et 5,5.*

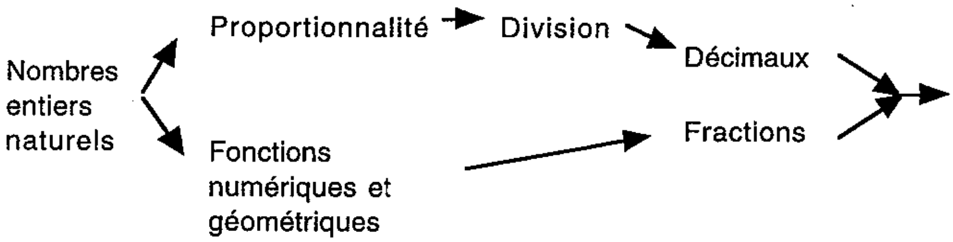
[Des dessins correspondants aux 4 cas ci-après sont faits : ils ne sont pas reproduits ici]

> - Dans le cas (I), l'échelle est en cm.
> - Dans le cas (II), les nombres entiers successifs sont placés de 2 cm en 2 cm (écart de 8 cm entre 3 et 7)
> - Dans le cas (III), les nombres entiers sont de 1,5 cm en 1,5 cm. C'est déjà plus délicat.
> - Dans le cas (IV), l'écart entre 3 et 7 est volontairement peu commode. On peut se tirer d'affaire sans mesure, grâce au guide-âne, réseau de parallèles permettant

[5] *LdM*, p. 51.

> d'intercaler 3 points (pour les nombres 4, 5, et 6), régulièrement, sur le segment limité par les nombres 3 et 7. [6]

La "voie fonctions" leur paraît présenter beaucoup d'avantages. Elle permet en particulier de traiter des problèmes géométriques en liaison avec des problèmes numériques. Nous reconnaissons ici le "jeu de cadres" de Douady.



> Deux caractéristiques à cette stratégie d'enseignement, qui se répand de plus en plus depuis une dizaine d'années :
> - l'importance donnée aux agrandissements et aux réductions "homothétiques", c'est-à-dire respectant la **forme** des figures géométriques, les **proportions** lorsqu'il s'agit de nombres, avec un rôle particulier donné aux facteurs 10, 100, 1000,
> - la conduite *de front* d'activités concernant des concepts "solidaires" : il n'y a pas de priorité, d'antériorité dans l'enseignement des nombres décimaux par rapport à celui des fractions, ou réciproquement... [7]

Les auteurs justifient leurs choix en référence au collège : rendre les nombres décimaux indépendants des mesures de grandeurs.

> Certaines de nos options relatives aux nombres décimaux et aux fractions sont déjà lisibles dans *Atout Math CE1 et CE2* ! Nous voulions en effet, que, indépendamment de toute unité de mesure, les élèves arrivent en collège en ayant donné au nombre décimal un vrai statut de nombre abstrait. Notre expérience des collèges nous permet d'affirmer que, bien plus que de compétences expertes en calcul automatique, le jeune collégien a besoin de disposer de conceptions saines :
>
> - 3,4, c'est un nombre plus grand que 3, plus petit que 4 ;
> - 3,4 est plus près de 3 que de 4 ;
> - 3,4 est entre 3 et 4, comme 34 est entre 30 et 40 ;
> - 3,4 F, c'est 3 francs et 4 dixièmes de francs, c'est donc 3 francs et 40 centimes ;
> - entre 3,4 et 3,5, il y a par exemple 3,43. [8]

2.3- Les rubriques du manuel

Les leçons présentent des rubriques fixes qui sont commentées dans le livre du maître (p. 14 à 17).

1- *Réfléchis*, ce qui renvoie au principe "Construire des connaissances", à partir d'une résolution de problème, "en entrant dans une activité proprement scientifique, faite d'hypothèses, d'essais, d'approximations, de vérifications, de rectifications et d'échanges".

[6] *LdM*, p. 51

[7] *LdM*, p. 52.

[8] Ibid.

2- *Entraîne-toi*, ce qui renvoie à "Tester leur efficacité et explorer leur champ d'application", faire fonctionner les connaissances que l'on vient de construire, les rendre familières et aisées.
3- *N'oublie pas*, ce qui renvoie à "Ne pas seulement savoir faire, mais savoir dire", relier les résultats obtenus aux procédures utilisées, marquer ce dont on pourra se resservir,
4- *Te souviens-tu ?* Exercices, ce qui renvoie à "S'exercer de mieux en mieux à faire ce qu'on a appris à faire", consolider sur le long terme, hors du contexte initial d'apprentissage, éventuellement dans des situations plus complexes.
5- *Où en suis-je ?*, ce qui renvoie à "Faire le point sur ce qu'on sait, ce qu'il faut continuer à travailler et se rendre témoin de ses progrès".

La rubrique n° 1 nous sera très utile pour l'étude des problèmes qui donnent du sens aux nombres décimaux. La rubrique n° 3 nous fournira les registres sémiotiques les plus utilisés.

Le guide du maître est un ouvrage beaucoup plus copieux que le manuel de l'élève (287 pages). Il est fortement structuré par un plan-type. La situation "Réfléchis" fait l'objet d'une présentation en plusieurs rubriques : description de la tâche proposée aux élèves, activités antérieures qui la préparent, nouveautés de la leçons, obstacles voulus, progrès attendus. Un déroulement est ensuite proposé. Il est illustré de descriptions de travaux d'enfants, avec parfois des photocopies ou des transcriptions de dialogues entre élèves ou entre un élève et l'enseignant. Les prolongements ou renforcements sont annoncés avec renvois aux pages correspondantes du livre.

Nous utiliserons en même temps le livre de l'élève et le livre du maître.

2.4- La progression sur les décimaux

Le manuel de CM1 comporte l'introduction des nombres décimaux ayant au plus deux chiffres après la virgule, puis l'addition et la soustraction de décimaux, à la multiplication d'un décimal par un entier. Le produit de deux décimaux est repoussé au CM2.[9]

L'ouvrage est découpé en 6 modules, chaque module traitant de chacun des 6 thèmes suivants : résolution de problèmes, géométrie, nombre et numération, mesurage, fonctions numériques, calcul. Aux 32 pages dont le titre évoque les décimaux ou les fractions, il convient d'ajouter de nombreuses leçons qui émaillent les modules d'enseignement : partage de longueurs, graduations régulières, intercalations régulières, partage de durées, graduations liées aux masses et aux capacités, proportionnalité et fonctions numériques, conversions complexes, soit plus de 20 pages (non compris les exercices de révision). La structure même de l'ouvrage fait penser à une sorte de "torsade" multicolore qui progresserait d'un module à l'autre. Les regroupements qui apparaissent ci-après sont de notre fait, pour faciliter l'analyse.

Une première série de leçons porte sur les graduations régulières.

Elles ont été préparées par le calcul de la moyenne de deux entiers (*LdE*, p. 57), qui s'achève sur cette recommandation.

> *N'oublie pas*
> La moyenne de deux nombres est située juste au milieu, à mi-chemin entre ces deux nombres.

[9] Les programmes officiels de 1995 ont déplacé la multiplication de décimaux en sixième.

Les graduations sont tout d'abord fabriquées par report de distances (mesurées en centimètres) et recherche de points "à mi-chemin", expression qui avait déjà été utilisée dans l'aide-mémoire sur le calcul de la moyenne en liaison avec la construction au compas du milieu d'un segment.[10]

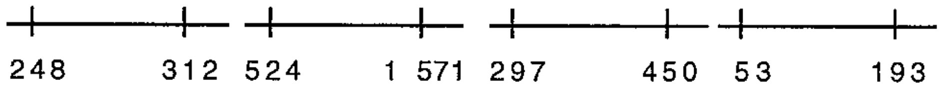
L'exercice suivant invite à compléter une graduation géométrique sans mesurer les écarts entre les points : il faut faire des reports au compas (aide suggérée *LdE* p. 66).

Le partage géométrique des segments se perfectionne avec le système du guide-âne :

> On détermine combien on veut de segments, ou combien on veut placer de points, pour savoir quelles parallèles utiliser.[11]

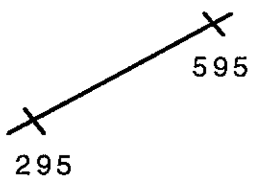
La leçon se termine par la recherche du milieu numérique d'un segment dont les extrémités sont repérées par des nombres.

> Sur chaque portion de demi-droite numérique, place le milieu du segment et donne, si tu le peux, le nombre qui lui correspond.



Le partage d'un segment en plusieurs segments de même longueur se fait plus tard.

> Place deux points sur chaque segment pour le partager en trois segments de même longueur.
> Tu n'as pas le droit de mesurer.
> Quand c'est possible, indique le nombre qui correspond à chacun des points.[12]



D'autres segments sont représentés que nous n'avons pas dessiné ici : [512, 539] ; [1800, 2000] ; [348, 368] ; [421, 724]. Le livre du maître (p. 130) fournit des exemples de traitement par des élèves : les élèves calculent des distances, mais la "mise en commun" ne reprend pas ce calcul pour justifier l'introduction de nouveaux nombres, elle ne rappelle pas la relation entre multiplication et division.

> On insiste sur le fait que le problème a toujours une solution en géométrie et pas toujours avec les nombres, mais qu'on va bientôt lui en trouver une.[13]

Le passage *longueur <----> écart entre des nombres,* est supposé connu depuis les classes précédentes. Il est entretenu parallèlement en calcul mental à propos de déplacement d'un personnage sur la demi-droite numérique (sauts réguliers), sans que soient associées des écritures additives ou soustractives.

---

10 *LdE*, p. 60 et 61.

11 *LdE*, p. 76 et 77.

12 *LdE*, p. 81.

13 *LdM*, p. 131.

L'enrichissement de la demi-droite numérique joue sur la construction de points intercalaires par des procédés géométriques, points dont on recherche l'équivalent dans le domaine numérique par partage des écarts entre les nombres. On peut voir ici une similitude partielle avec le jeu de cadres de Régine Douady.

Remarquons, dans ce premier groupe de leçons, que la graduation est un objet en soi.

Un deuxième groupe de leçons traite du partage de grandeurs (durées, masses, capacités).

Le partage de durée est fait sur des durées calculées.

Réfléchis
La télévision retransmet ce soir un spectacle de cirque entre 20 h 45 et 23 h 25. Elle place deux interruptions de 10 minutes pour la publicité, de façon que les trois parties du spectacle aient la même durée.
Madame Durand doit parler au téléphone à un ami, mais elle ne veut pas le déranger, car elle sait qu'il adore le cirque. Elle décide de l'appeler pendant la publicité.
Quand peut-elle appeler son ami ?

Entraîne-toi.
Les autobus se succèdent régulièrement pour une même tranche horaire. Il y en a plus souvent entre 7 h et 8 h 30 qu'entre 8 h 30 et 11 h 30. Complète l'horaire des départs. Tu peux faire des calculs au brouillon.[14]

Heure de départ	7 h						8 h 30					11h 30

La mise en commun suggérée "met l'accent sur l'aide qu'apporte la représentation sur une demi-droite dans les situations de partage et surtout quand il s'agit de durée".

La leçon suivante porte sur les graduations de durée (voir copie des pages 84 et 85 du livre de l'élève, ci-après).

Les durées sont représentées par une bandelette de papier : au partage des durées correspond le partage de la bandelette en segments dont les extrémités portent des indications en fractions d'heures et en minutes. Le sablier représenté à côté des bandes de papier contient lui-même deux bandes dont les extrémités portent 0 et 1 : est-ce pour suggérer que les bandes se remplissent au fur et à mesure du déroulement du temps ? Le livre du maître n'en parle pas.

Cette double page sur les durées mérite des commentaires.

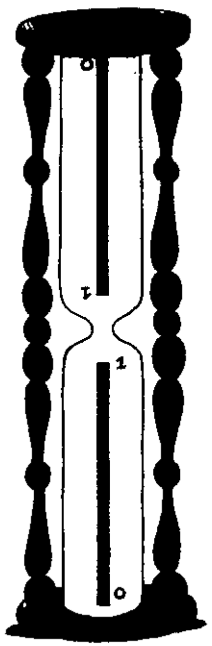
On peut se demander si le problème posé à l'élève est bien celui de partager des durées. En langue naturelle, sans contexte, nous ne pouvons dire si l'expression *8 heures* désigne un instant ou une durée. L'aide-mémoire "N'oublie pas" fait référence aux durées, mais les bandelettes de la page 85 associent des expressions du genre 3/10 h à des points. Or les points évoquent habituellement des instants et non des écarts entre instants (durées). Il n'est pas sûr que les élèves dominent l'abstraction que cet exercice suppose.

14 *LdE*, p. 82.

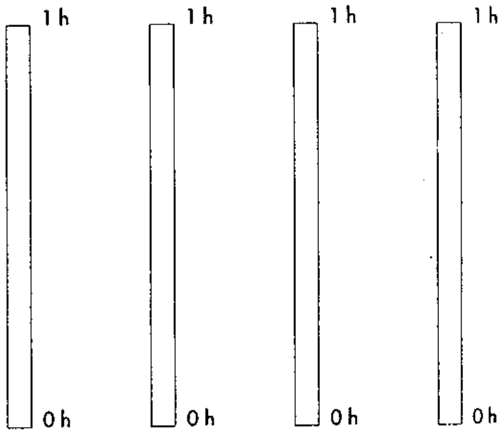
Durées
Graduations

ENTRAÎNE-TOI

Dans ce gros sablier, le sable s'écoule très régulièrement.
Il faut le retourner toutes les heures.



1 On peut le graduer de différentes façons. Tout dépend du nombre de points que l'on place entre 0 h et 1 h.
En utilisant un *guide-âne*, place le nombre de points que l'on t'indique. Pour chaque point, écris la durée.



3 points — 2 points — 4 points — 5 points

2 Complète le tableau. On divise une heure en parties égales.

Nombre d'intervalles	2	4	6	3	5	10
Durée en minutes de chaque intervalle	...	...	...	...	...	...

N'OUBLIE PAS

Tu connais $\frac{1}{2}$ h, $\frac{1}{4}$ h, ils correspondent à l'intervalle que l'on obtient en divisant l'heure en deux, en quatre.

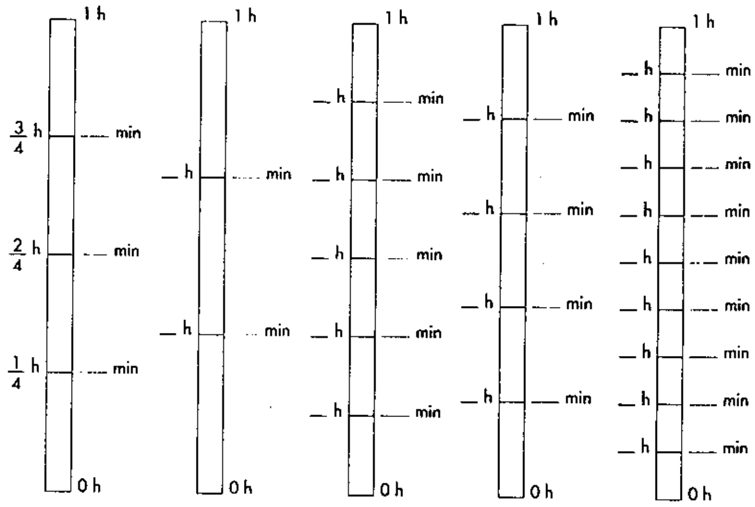
$\frac{1}{2}$ **h = 30 min** ; $\frac{1}{4}$ **h = 15 min**

On peut introduire aussi $\frac{1}{3}$ h, $\frac{1}{5}$ h, $\frac{1}{6}$ h, $\frac{1}{10}$ h.

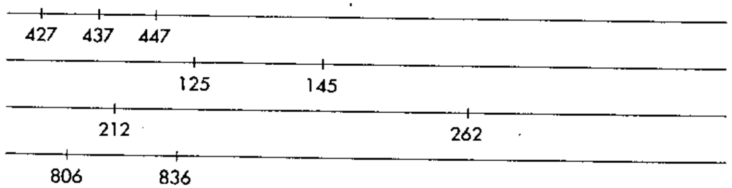
Complète.

$\frac{1}{3}$ h = ... min ; $\frac{1}{5}$ h = ... min ; $\frac{1}{6}$ h = ... min ; $\frac{1}{10}$ h = ... min

1 Utilise les nouvelles notations pour compléter les graduations.
Indique aussi les durées en minutes.



1 Complète les graduations de 10 en 10. Tu ne peux utiliser qu'un *guide-âne* et un compas.



2 Tous les autobus partent de façon régulière entre 6 h 30 et 8 h 30, mais sur certaines lignes, ils sont plus rapprochés que sur d'autres.
Complète les horaires ; tu peux faire des calculs sur ton cahier d'essais.

Ligne A	
6 h 30	8 h 30
Ligne B	
6 h 30	8 h 30
Ligne C	
6 h 30	8 h 30

Les égalités de l'aide-mémoire résultent du savoir social pour 1/2 h et 1/4 h. Comme les élèves ont calculé des durées en divisant les soixante minutes en parties égales, c'est donc par analogie qu'ils définissent ce qu'est 1/3 h, 1/5 h, 1/6 h, 1/10 h : il n'y a pas de lien apparent entre le partage par 6 de l'heure et la multiplication par 6 de la durée 1/6 h. Le livre du maître est muet sur ce point.

Les élèves travaillent-ils sur les durées ou sur le problème équivalent du partage d'une bande de papier ? Comme il n'y a pas de travail physique associé, le risque de glissement existe.

Tout se passe comme si le manuel imposait le partage de segment pour représenter le partage de grandeurs.

Le partage de masses est évoqué dans le contexte d'une relation de proportionnalité masse ---> prix, le prix au kilogramme étant fourni (*LdE*, p. 90). Le partage du segment associé aux masses est mis en correspondance avec celui des prix, plus exactement la correspondance est faite entre graduations, appelée "double-bande" (un matériel en carton est suggéré dans le livre du maître, p. 135). La "double-bande" est reprise dans la leçon sur la proportionnalité dans le cas de multiplicateurs entiers.

Pour les capacités, on retrouve la double-bande, mais aussi des équivalences de mesures, exercices pratiqués précédemment sur des longueurs et des masses (voir ci-après copie des pages 116 et 117, *LdE*).

Le demi est présenté avec son sens social : "50 cl , c'est 1/2 l", ce qui est confirmé par l'extrait du livre du maître où sont citées des remarques d'élèves.

> - Avec un litre, on remplit deux demi-litres : il suffit de doubler le nombre de litres.
> - C'est normal, un demi-litre, c'est la moitié d'un litre, c'est comme les heures et les demi-heures. [15]

Les auteurs comptent probablement sur l'usage social pour que les élèves donnent du sens à l'écriture 2/3 suivie d'un dessin de bouteille.

Les fractions attendues dans l'exercice suivant sont des "fractions simples" (1/2, 1/4, 3/4), sous la forme transcrite de l'expression orale : par exemple, 1 3/4. Le livre du maître ne donne pas d'indication sur les propriétés utilisées par les élèves : procèdent-ils par commensuration, par partage de l'unité ?

> Cet exercice combine l'usage de la proportionnalité et des nouveaux nombres. [16]

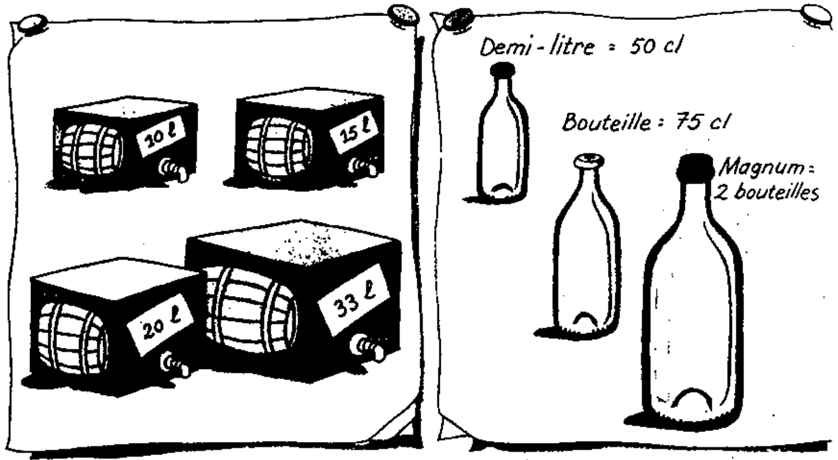
Remarquons, tant dans le livre du maître que celui de l'élève, l'absence d'écritures additives ou multiplicatives associées. Par exemple, l'expression *Deux 1/2 l* n'est pas associée à *deux fois un demi-litre (2 x 1/2)* ou *1/2 + 1/2* . De même, le *et* de l'expression *Avec 1 (magnum dessiné) et 2/3 (magnum dessiné)* n'est pas associé à l'addition des capacités.

---

15 *LdM*, p. 156.

16 Id.

Capacités. Graduations



RÉFLÉCHIS

1 Monsieur Charles vend du vin dans son magasin. Il le fait venir en cubitainers et le met lui-même en bouteilles. Il hésite entre les quatre sortes de cubitainers. Aide-le à déterminer le nombre de demi-litres qu'il peut remplir avec chaque sorte de cubitainer. Il a commencé un schéma :

Nombre de litres: 0 1

Nombre de demi-litres: 0 2

50cl, c'est $\frac{1}{2}$ l. Avec 1 l, je remplis deux $\frac{1}{2}$ l.

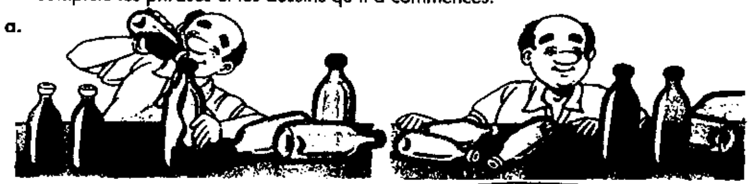
ENTRAÎNE-TOI

2 Trouve combien on peut remplir de bouteilles avec chaque sorte de cubitainer.

3 Trouve combien on peut remplir de magnums avec chaque sorte de cubitainer.

4 Monsieur Charles veut proposer son vin de différentes façons pour contenter tous ses clients. Il a besoin de connaître les correspondances entre les différents récipients. Complète les phrases et les dessins qu'il a commencés.

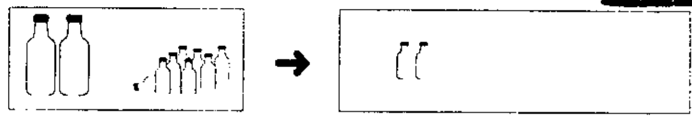
a.



Avec 3 , on peut remplir

b. Avec 3 , on peut remplir

c.



Avec 1 et $\frac{2}{3}$ de , on peut remplir

d. Avec 2 , on peut remplir

e. Avec 5 , on peut remplir

f. Avec 6 , on peut remplir

g. Avec $4\frac{1}{2}$, on peut remplir

5 Complète les graduations.

Nombre de bouteilles: 0 1 2 3 4 5

Nombre de magnums: 0 $\frac{1}{2}$ 1 $1\frac{1}{2}$ 2

Nombre de demi-litres: 0 1 2 3

Nombre de magnums: 0

Nombre de demi-litres: 0 1 2

Nombre de bouteilles: 0

La commensuration est présente dans l'énoncé de la leçon sur les "Fractions simples" :

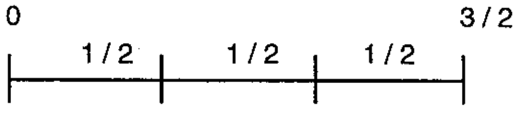
> *Avec 1 litre de jus d'orange, je peux remplir...*
> *2 verres A*
> *ou 3 verres B*
> *ou 4 verres C*
> *ou 5 verres D ou 10 verres E*
>
> Complète les phrases suivantes.
> Le verre A contient 1 demi-litre (1/2 l) ;
> pour remplir 3 verres A, il faut ------ demi-litres (3/2 l).
> 5 verres B contiennent ----- tiers de litre (---/3 l)
> 12 verres D contiennent ---- cinquièmes de litre (---/--- l).
> --- verres C contiennent 16 quarts de litre (---/--- l).
> --- verres --- contiennent 7 dixièmes de litre (---/--- l)
> --- verres --- contiennent --- ------- de litre (13/4 l). [17]

Le commentaire du livre du maître oriente vers l'équivalence de fractions.

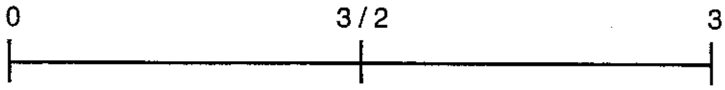
> L'équivalence de fractions est approchée à travers quelques cas. Il n'est pas question de chercher des règles de reconnaissance ou de construction de fractions équivalentes, mais on fera émerger les remarques, les conjectures. [18]

Il reporte à la sixième le lien avec l'addition, la multiplication et la division par un entier.

> La notation 3/2 l est introduite comme une traduction de l'expression trois demi-litres.[19]
>
> En 6°, on reviendra sur le fait que 1/2 + 1/2 + 1/2 ou 1/2 x 3 ou encore :



> donnent le même résultat que 3 : 2 ou



Pourtant, lors de l'exercice qui demande de situer approximativement sur la droite numérique une série de fractions, les expressions spontanées des élèves que le livre du maître rapporte montrent que l'addition et la multiplication par un entier seraient à leur portée.

> - Pour 5/3, j'ai pensé au verre B : avec 5 verres, on a un litre et deux verres ; 2 verres, c'est moins qu'un litre. Je mets 5/3 entre 1 et 2, plus près de 2 que de 1.
> - 12, c'est 2 fois 5 et encore 2 ; 12/5, c'est compris entre 2 et 3.
> - 7/2, c'est 3 et demi, c'est juste au milieu entre 3 et 4. (...)

---

[17] *LdE*, p. 120.
[18] *LdM*, p. 161.
[19] *LdM*, p. 162.

- 16/4, c'est comme 4, parce que 4 x 4 = 16,
- 15/4, c'est un quart de moins que 16/4. [20]

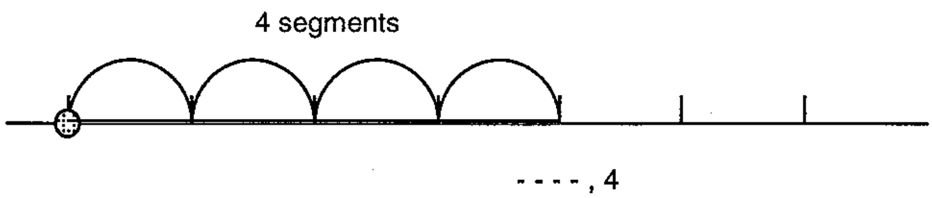
Pour situer une fraction sur la demi-droite, les élèves sont invités à établir la correspondance par la double-bande en la schématisant au besoin : 3 verres, c'est un litre ; 6 verres, c'est 2 litres, etc. (*LdE* p. 127, aide pour l'exercice 2 de la page 120).

Dans les différents contextes de grandeurs, c'est la demi-droite numérique qui sert d'outil commun. La résolution est faite sur la demi-droite et les résultats interprétés en terme de grandeurs.

Le dernier groupe de leçons porte sur les <u>nombres décimaux</u>, introduits par les écritures de fractions décimales. La somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 apparaît dans l'aide-mémoire. Les entiers sont représentés par des points, les dixièmes qu'on ajoute sont représentées par des segments.

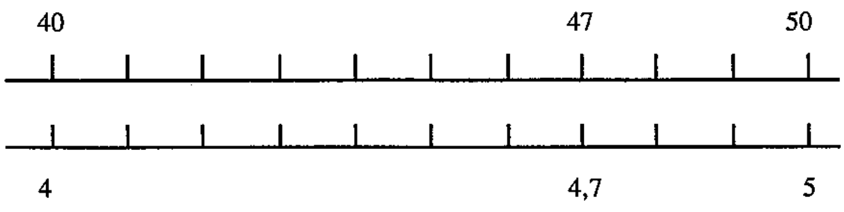
64/10 est compris entre deux nombres entiers qui se suivent : ---- et -----
64/10 = ----- + --- /10 ; on écrit aussi 64/10 = ----, ----
64/10----- + --- /10 ----, ---- désignent le même nombre. (...)

Quatre dixièmes après un nombre entier, c'est le quatrième trait noir après un trait rouge [traits qui marquent les entiers], c'est l'extrémité du quatrième segment.[21]



L'ordre des décimaux découle de celui des entiers, par le biais de la "double-bande". Rappelons que la double-bande a été introduite pour représenter la proportionnalité dans des contextes de grandeurs (masse ----> prix, nombre de bouteilles ----> capacités etc.). C'est maintenant sans contexte de grandeur que la correspondance est faite entre ordre des entiers et ordre des décimaux. Les aide-mémoires le soulignent :

4,7 est placé entre 4 et 5
comme 47 est placé entre 40 et 50.

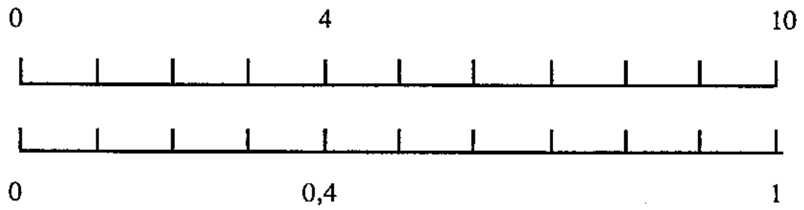


20 Id.

21 *LdE*, p. 132.

Quand on divise 47 par 10, on trouve 4,7.
Quand on multiplie 4,7 par 10, on trouve 47.[22]

Quand on divise par 10 un nombre plus petit que 10, le résultat est plus petit que 1.
0,4 est placé entre 0 et 1, comme 4 est placé entre 0 et 10.



Quand on multiplie 0,4 par 10, on trouve 4. [23]

Ici, la multiplication est exprimée en langue naturelle, alors qu'elle est absente pour les fractions. Par ailleurs, cette formulation n'est pas associée aux égalités 4,7 x 10 = 47 et 47 : 10 = 4,7.

L'addition et la soustraction de décimaux sont présentées sur la demi-droite numérique, avec un croquis de type "règle à calcul", ce qui correspond implicitement à l'addition des longueurs. Les élèves sont invités à ajouter les parties entières, puis les parties décimales (*LdM* p. 174 et 175).

La liaison entre dixième et division par 10 est amorcée dans la leçon intitulée "Le dixième d'une quantité" (*LdE*, p. 150 et 151). Quatre procédés différents sont donnés dans le contexte des masses, leur coordination ne fait pas l'objet de commentaires. Puis d'autres énoncés sont proposés dans le contexte des longueurs, des francs et des durées.

L'ouvrage pour le CM1 s'achève avec la présentation de fractions décimales de dénominateur 100, les techniques d'addition et de soustraction des nombres décimaux, la multiplication d'un décimal par un entier (addition répétée). Le travail est fait de manière formelle, en référence aux déplacements sur la demi-droite numérique. La dernière activité porte sur l'expression de mesures de grandeurs sous forme décimale.

2.5- Les caractéristiques de la progression d'*Atout-Math*

Les *"nouveaux nombres"* sont introduits comme points de partage réguliers sur une demi-droite numérique, le passage entre longueurs et positions sur la droite étant supposé acquis dans les années antérieures et ne donnant lieu à aucune reprise. La notation décimale est présentée comme un changement d'écriture par rapport à la notation des fractions décimales.

Les *problèmes associés* aux fractions ou aux décimaux sont, outre le partage régulier de segments, les relations de proportionnalité (par exemple masse ----> prix), les changements d'unités de mesure dans des cas non conventionnels.

22 *LdE*, p. 134, souligné par les auteurs.
23 *LdE*, p. 135, souligné par les auteurs.

Des *grandeurs* sont évoquées au fil du manuel. Le partage effectif de l'unité de longueur n'est fait que pour déterminer la position de points sur des segments : il ne fournit pas une autre unité de longueur. Les autres grandeurs (durées, masses, capacités) sont évoquées et le partage de l'unité de grandeur est immédiatement illustré par le partage d'une bande de papier ou d'un segment sur une droite numérique : il n'y a pas de traitement de la question dans l'espace des grandeurs. La demi-droite numérique se substitue aux grandeurs elles-mêmes. Il semble que le lien entre physique et mathématiques soit considéré par les auteurs comme hors du champ des mathématiques.

Les *grandeurs familières* sont le plus souvent évoquées. La maîtrise des fractions simples repose sur les emplois sociaux (demi-heure, demi-litre). Les rapports multiplicatifs entre unités et sous-unités de grandeurs dans le système décimal restent implicites.

La comparaison de fractions se fait par la proportionnalité, et non par l'addition. Rappelons la règle :

> 4,7 est placé entre 4 et 5
> comme 47 est placé entre 40 et 50.

Les *registres sémiotiques* majoritaires sont la demi-droite numérique ou la double-bande. Il n'y a pas de travail systématique mettant en relation les positions des points sur la demi-droite numérique et les distances à l'origine. La double-bande joue un rôle analogue à celui des graphiques de Douady : elle illustre les écarts, elle suggère des points intermédiaires.

Les tableaux de nombres sont fréquents. Le nom de l'opérateur est toujours fourni pour un opérateur additif ou soustractif, entier ou décimal ; il ne l'est pas toujours pour un opérateur multiplicatif décimal (par exemple le dixième d'un nombre). Les expressions en langue naturelle ne sont pas toujours traduites par des égalités mathématiques.

Le calcul approché, largement utilisé pour les entiers, n'est pas illustré dans les calculs formels faits avec des décimaux. Il apparaît à l'occasion de la résolution d'un problème postérieur à l'introduction des décimaux.

La *calculatrice* n'intervient pas dans la progression.

Par rapport aux <u>programmes officiels</u>, la progression respecte la limitation aux seules fractions usuelles et fractions décimales (objectifs de cycle 3). La proportionnalité, ressort de la progression d'*Atout Math*, fait partie des notions de ce cycle. La double-bande n'est pas culturellement associée à la proportionnalité, mais, dans le cas de proportionnalité, elle joue le même rôle qu'un graphique construit sur deux axes rectangulaires, graphique qui est inscrit dans les textes officiels.

Le partage régulier d'un segment et la graduation d'une demi-droite ne figurent pas explicitement dans les objectifs pour le cycle 3. On pourrait les inscrire à la rubrique *Résolution de problèmes*. Nous avions déjà vu que les textes officiels ne proposent pas de listes de problèmes qui donneraient du sens aux décimaux : les choix des auteurs d'*Atout Math* pourraient être justifiés d'un point de vue légal, mais la présence insistante, tout au long de l'ouvrage, du partage régulier d'un segment, de la graduation d'une droite, place le manuel dans une postion marginale par rapport aux usages ordinaires.

Par comparaison avec les progressions de référence, les auteurs d'*Atout Math* nous paraissent plus proches de la progression Douady & Perrin que de la progression Brousseau & Brousseau : ils n'étudient pas les grandeurs pour elles-mêmes, ils établissent des jeux de cadre entre la géométrie et les nombres, ils utilisent une double-bande dont l'emploi est très proche des graphiques de fonctions de Douady & Perrin.

Les points communs avec la progression Douady & Perrin restent néanmoins faibles. Le partage régulier de segment, un des ressorts principaux de leur progression, ne figure pas dans la progression Douady & Perrin. Les propriétés numériques des nouveaux nombres sont présentées en lien quasi exclusif avec la demi-droite numérique et le codage de graduations. Tout se passe comme si la demi-droite numérique était pour les auteurs à la fois signifiant et signifié, objet et outil, les grandeurs familières donnant l'occasion d'illustrer ses propriétés. Les décimaux sont obtenus comme nouvelle écriture de fractions décimales, leur existence n'est pas reliée à une résolution de problème d'approximation. Beaucoup de propriétés des décimaux ou des rationnels sont énoncées dans la langue naturelle sans que soient présentées les égalités correspondantes. L'inspiration "didactique" est donc lointaine.

3- Diagonale, CM1, Nathan, 1993

L'analyse de ce manuel sera basée sur le livre de l'élève (*LdE*) paru en 1993, et le livre du maître (*LdM*) paru en 1994.

3.1- Les auteurs et la didactique des mathématiques

Les auteurs, J.L. Brégeon, L Dossat, A. Myx, B. Poli et P.Y. Vicens travaillent en institut universitaire de formation des maîtres (IUFM). Ils ont été associés à plusieurs recherches dans le cadre de l'institut national de recherche pédagogique (INRP).

On trouve, dès les premières pages du livre du maître, des citations de Brousseau, Bachelard (p.6) et Vergnaud (p. 9). On peut donc considérer que les auteurs connaissent les travaux de didactique de Brousseau et Douady & Perrin.

3.2- Les choix des auteurs

Le livre du maître donne des indications sur les choix de progression.

> (Les) fractions vont être introduites dans le cadre d'un problème de mesurage (expression d'une longueur en fonction d'une autre), puis l'écriture sera généralisée et les fractions usuelles (demi, tiers, quart, fractions décimales) feront l'objet d'une étude plus systématique.
>
> Les fractions décimales, considérées comme des fractions particulières, donneront lieu à des exercices d'écriture et de lecture afin de mieux associer l'idée des puissances de 10 et l'écriture des nombres décimaux. Le lien avec des unités usuelles pourra alors être abordé et le travail de comparaison des mesures pourra s'effectuer avec les nombres décimaux. Cette partie est une étape importante dans cette progression, puisqu'il faut que les enfants réutilisent leurs connaissances sur la comparaison des entiers en évitant de les plaquer sur les décimaux. Il convient en effet de veiller à ce que les enfants ne commettent pas la confusion de considérer un décimal comme le recollement de deux entiers et fassent ce type d'erreur en comptant : 2,7 2,8 2,9 2,10 2,11 considérant qu'après 7,

> c'est 8 puis 9 puis 10 puis 11. On risque aussi de retrouver cette erreur plus tard lors de l'apprentissage de la multiplication :
>
> 2,3 x 3,4 = 6,12 puisque 2 x 3 = 6 et 3 x 4 = 12
>
> Les seules opérations que l'on envisage au CM1 seront l'addition et la soustraction des décimaux. (...) Remarquons que l'addition et la multiplication des fractions évoquées lors des activités d'introduction ne feront pas l'objet d'études en dehors du cadre des manipulations facilement représentables. Le travail sur les approximations et les ordres de grandeur sera développé [au CM2].[24]
>
> Au CM1, s'agissant du produit d'un nombre décimal par un entier, nous nous sommes limités au cas où le multiplicateur est soit un naturel inférieur à dix, soit une puissance simple de 10 (10 ; 100 ; 1 000). [25]

La justification de leur choix est donnée de manière brève :

> (...) nous avons construit les nombres décimaux dans la perspective de donner de l'unité à la notion même de nombre, ce qui se traduit par deux faits fondamentaux :
> - l'étude des fractions précède l'étude des décimaux (fractions décimales) ;
> - ces nombres (fractions décimales ou non, décimaux) ont été de suite placés sur la droite numérique déjà graduée par les nombres entiers. [26]

Cette priorité pour les fractions semble être nuancée par le choix d'un autre point d'appui, les décimaux de la vie courante :

> Les points de départ pour étudier l'addition et la soustraction des décimaux sont pris dans les domaines de la vie courante ; les techniques opératoires sont simples quand l'élève a pris l'habitude de bien gérer la disposition des nombres à additionner ou soustraire.[27]

Construction et usages sociaux semblent être présents dans la dynamique de la progression, que nous allons examiner maintenant.

3.3- Les rubriques du manuel

Le livre du maître, copieux (415 pages), comporte non seulement des indications sur le déroulement des séances, mais encore des épreuves d'évaluation et des activités complémentaires. Il est structuré en cinq "périodes", recouvrant l'année. Chaque période comprend 6 "paliers" d'enseignement sur des thèmes parfois indépendants les uns des autres, un "palier" d'évaluation et des ateliers de renforcement, soit pour entretenir les acquis des élèves, soit pour répondre aux besoins spécifiques d'enfants en difficulté ("ateliers de besoin").

Une attention spéciale est portée à l'évaluation des élèves en cours d'apprentissage.

> Une condition indispensable pour mettre en œuvre cette "pédagogie de l'erreur" est que le maître accepte que l'élève produise des erreurs sans que lui-même se sente coupable et sans que l'enfant soit également culpabilisé. L'erreur ne doit pas être une faute, mais plutôt une occasion de réflexion et de progrès pour celui qui l'a commise. [28]

---

24 *LdM*, p. 182.

25 *LdM*, p. 333.

26 *LdM*, p. 332.

27 *LdM*, p. 33.

28 *LdM*, p. 6.

Les leçons présentent des rubriques fixes qui sont commentées dans le livre du maître (p. 3 à 10).

- Familiarisation numérique, entraînement régulier au calcul réfléchi, mental ou écrit.
- Activité, constituée le plus souvent de sujets d'étude, qui sert de points de départ pour aborder l'apprentissage d'une notion, d'un savoir-faire.
- Exercices d'application directe de savoirs ou savoir-faire abordés lors des activités.
- Si nécessaire, ce qui est à mémoriser.
- Résolutions de problèmes.
- Bilans 1, 2, 3.

Les résolutions de problèmes suivent une progression indépendante du contenu des leçons qui les ont juste précédées (familiarisation, activité, application, mémorisation). Les auteurs justifient cette organisation (p. 9 et 10) par la classe de sixième "où les mathématiques (c'est-à-dire l'aspect autonome de cette discipline) prendront petit à petit la place des situations matérielles ou concrètes".

Les bilans de fin de période sont présentés sous forme de fiches d'évaluation individuelle prêtes à photocopier, mentionnant les objectifs d'apprentissage de la période : l'enseignant peut marquer dans un tableau à l'aide de croix pour chaque objectif le degré d'acquisition de l'élève (1- acquis, 2- en voie d'acquisition, 3- non acquis).

Cette seule présentation générale montre que l'ouvrage est marqué par le souci de la pédagogie différenciée : le traitement de l'erreur qu'ils recommandent est cohérent avec le point de vue des didacticiens qu'ils citent. En revanche, nous n'avons que très peu d'indices dans ces pages d'introduction sur le fonctionnement pédagogique de la classe, sur la "mise en application" de ces principes. La résolution de problèmes semble faire un thème à part et non sous-tendre l'ensemble de la progression.

3.4- La progression sur les décimaux

Les fractions et décimaux sont introduits à la période 3. Le livre de l'élève y consacre 38 doubles-pages, auxquelles il convient d'ajouter 16 doubles-pages sur les mesures et 7 pour la proportionnalité.

L'introduction des fractions est immédiatement suivie de l'introduction de la notation décimale, et d'exercices portant sur les conversions de mesures de grandeurs.

La double page qui *introduit la notion de fraction* (voir ci-après la copie des pages 88 et 89 du *LdE*) démarre par une activité de commensuration de longueurs : mesurer la largeur d'un rectangle avec la longueur de ce rectangle pour unité [29].

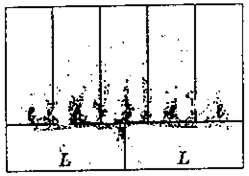
29 Une erreur s'est glissée dans le livre du maître : la consigne fixe la largeur du rectangle comme unité, alors que les écritures associées utilisent la longueur pour unité.

Les fractions

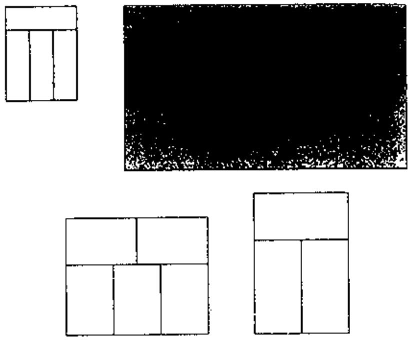
Avec les nombres...
Compléter : 123 = (12 ×) + 3
101 = (11 ×) + 2 143 = (11 ×) + ...

1 Activité

Sur le schéma ci-dessous :
• 2 fois la longueur L est égale à 5 fois la largeur l' ;
• si on partage en 5 parties égales la longueur formée par 2 fois L, on obtient la largeur l'
• l' est égale à $\frac{2}{5}$ de L.

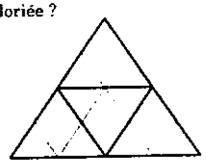


À l'aide de l'exemple ci-contre, explique chacune des figures ci-dessous.

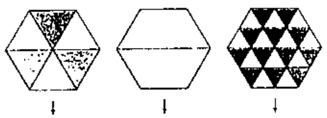


Exercices

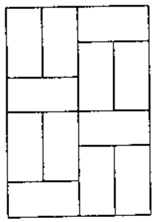
1 Redessine la figure ci-dessous et colorie *un* petit triangle sur *quatre*. Quelle fraction de la figure représente la partie coloriée ?



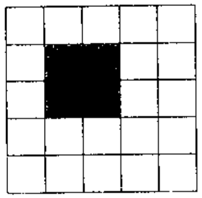
2 Quelle fraction de la figure représente la partie coloriée?



3 Colorie en bleu *un tiers* de ce carrelage.

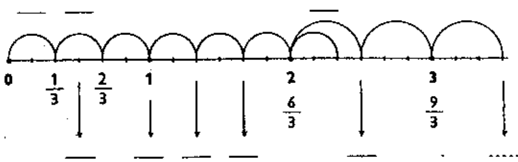


4 Que représente la partie coloriée pour le carrelage tout entier ?

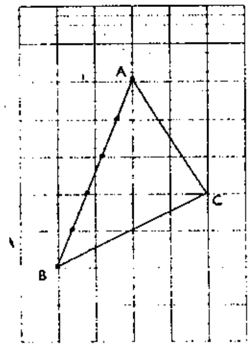


Reproduis cette droite et écris la valeur des intervalles marqués en bleu ou en rouge.

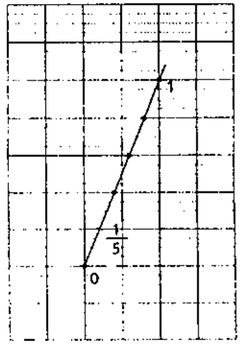
Écris une ou plusieurs fractions pour donner la position de chaque flèche verte.



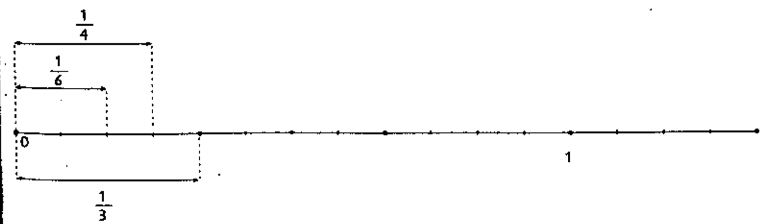
La longueur AB est partagée en 5 parties égales. Partage AC en 3 parties égales puis BC en 4 parties égales.



Donne les positions des points marqués en rouge. Redessine puis prolonge la droite pour marquer les points repérés par les fractions $\frac{6}{5}$ et $\frac{8}{5}$.



Examine bien ce schéma. Pour t'aider, tu peux le reproduire sur une feuille de papier quadrillé. Trouve deux fractions pour repérer chaque point rouge.



Des rectangles de couleurs différentes sont distribués (huit exemplaires de chaque rectangle) dont les dimensions sont telles que le rapport largeur/longueur fasse intervenir une fraction de numérateur 1 et une fraction de numérateur différent de 1. La consigne est la suivante :

> Pour chacune des couleurs, vous devez mesurer la longueur d'un rectangle en utilisant sa largeur. Puis il faut trouver un message qui traduise ce résultat. Pour y arriver, vous devez mettre les rectangles bout à bout sur la longueur et en face, sur la largeur, comme sur mon dessin. Ensuite, il faut rédiger le message afin que les autres groupes sachent s'ils ont les mêmes rectangles que votre groupe. [30]

Le but est de faire émerger deux nombres.

> Dans la nature des messages, il faut veiller à la prise en compte des deux nombres et à l'expression de l'une des dimensions en fonction de l'autre. [31]

La notation du livre du maître, *l/L*, fait penser que le thème d'étude porte sur les rectangles modèles réduits l'un de l'autre, en reliant les propriétés géométriques d'agrandissement ou de réduction aux rapports largeur / longueur. En fait, l'activité de commensuration ne sera pas reprise : on ne demandera pas de fabriquer des rectangles qui correspondraient à une fraction donnée. Le livre du maître suggère toutefois de regrouper les rectangles qui se ressemblent, pour préparer le travail d'égalité des fractions.

Dans les quatre exercices qui suivent, les fractions demandées interviennent dans des contextes d'aires et non de longueurs.

> Ex 1- Redessine la figure et colorie un petit triangle sur quatre. Quelle fraction de la figure représente la partie coloriée ?

L'expression *un triangle sur quatre* est de nature "statistique", ce qui est sans lien avec la fraction 1/4 introduite précédemment par commensuration. Le commentaire du livre du maître confirme le changement de point de vue par rapport au premier exercice :

> Pour la deuxième partie de la consigne, il faut insister pour que les élèves conçoivent bien que si la partie colorée représente 1/4 de la figure, la figure représente 4 fois la partie coloriée. Cette possibilité d'inverser la fraction montre à la fois la nécessité de préciser l'unité (l'unité est l'aire de la figure).[32]

Pour les auteurs, la fraction est associée au partage de la figure prise implicitement pour unité d'aire, en seizièmes ou en quarts (selon la disposition des pièces colorées).

La fraction de l'exercice 3 a un autre statut, celui d'opérateur linéaire : on prend le tiers d'une quantité que l'on peut mesurer à l'aide d'un entier divisible par 3.

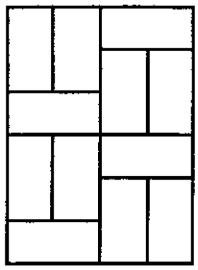
---

30 *LdM*, p. 185.

31 Id.

32 Ibid.

Ex 3- Colorie en bleu le tiers de ce carrelage.



Pour les auteurs, cet exercice permet d'introduire un procédé utile par la suite.

> On peut alors montrer aux enfants que le tiers d'une figure peut être obtenu en la partageant en parties égales et en prenant un tiers de chacune de ces parties. [33]

Dans l'exercice 5, les fractions servent à graduer une demi-droite numérique, avec un début d'utilisation de leur double statut de position et partage de l'unité. L'unité est subdivisée en six, sans que les sixièmes soient inscrits sur la figure avec valeur d'intervalle : les élèves doivent trouver la longueur d'intervalles représentés par des arcs (1/3 et 1/2).

La relation entre le codage des points et la distance à zéro n'est pas explicitée. On peut supposer que les élèves se fient à la succession des numérateurs 1/3, 2/3, 3/3, 4/3, etc., plus qu'à l'additivité des longueurs (1/3 + 1/3 = 2/3 ou deux fois 1/3).

L'exercice 8 est du même genre que l'exercice 5 : l'unité est subdivisée en douzièmes, sans que la fraction 1/12 soit écrite. En revanche, des intervalles de valeur 1/3, 1/4, et 1/6 sont représentés.

Les exercices 6 et 7 décrivent un procédé graphique pour partager un segment en parties de même longueur (procédé du guide-âne).

Cette double page rassemble des situations que l'on peut associer au codage fractionnaire : commensuration de longueur, partage de l'unité d'aire, statistique dans un contexte d'aire, rapport partie/tout dans un contexte d'aire, demi-droite numérique (points et positions), partage d'un segment (par guide-âne). Aucune de ces situations ne conduit à des écritures d'égalités ou de comparaisons, aucun lien n'est établi d'une situation à l'autre, hormis la notation fractionnaire elle-même.

Les auteurs semblent adopter une pédagogie basée sur la mémorisation d'une série de situations-types, et non sur la résolution de problèmes. Nous allons le vérifier avec la double-page suivante qui traite des fractions égales (voir ci-après copie des pages 90 et 91, *LdE*).

On trouve tout d'abord des exercices semblables à certains déjà présentés : la fraction colorée d'une figure, la graduation d'une droite (certains intervalles étant donnés), en activités d'introduction et dans l'exercice 4 ; le rapport partie/tout dans un contexte de quadrillage et de durées familières dans les exercices 6 et 7.

Il n'y a pas d'indication dans le livre du maître sur la relation possible entre "prendre le quart d'un nombre" et le diviser par 4. Pourtant le commentaire fait dans le livre du maître montre que la plaque de 144 carrés a été partagée en quatre morceaux de même aire.[34] (*LdM*, p. 190).

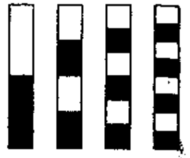
33 *LdM*, p. 186.

34 *LdM*, p. 190

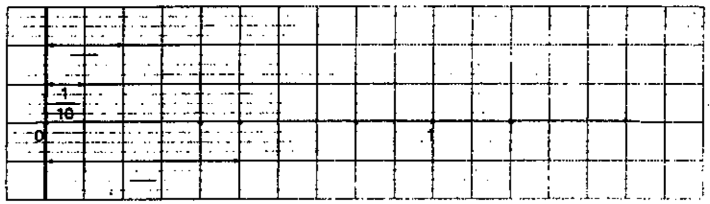
Les fractions égales

Avec les nombres
Calculer 677 ...
823 x 15 1929

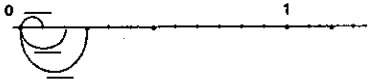
■ Pour chacune des quilles ci-contre, trouve la *fraction* représentée par la partie rouge.



■ Dessine la droite numérique ci-dessous.
Pour chaque point rouge, donne les fractions indiquant sa position.

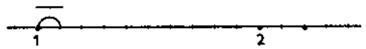


■ Écris des fractions pour indiquer la position des points rouges.



■ Reproduis la droite numérique ci-dessous et place les fractions suivantes :

$\frac{6}{5}$ $\frac{16}{10}$ $\frac{20}{10}$ $\frac{10}{5}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{12}{10}$



À l'aide de l'exemple, écris en lettres les fractions suivantes :

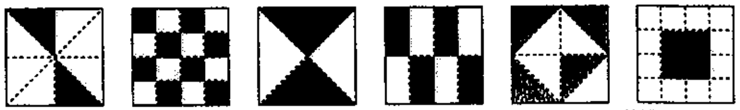
Exemple : $\frac{3}{4}$: trois quarts ; $\frac{5}{8}$: cinq huitièmes.

$\frac{2}{10}$ $\frac{245}{100}$ $\frac{18}{5}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{348}{10}$ $\frac{4}{3}$

Écris les nombres suivants sous forme de fractions :

un tiers	cinq centièmes
deux quarts	cinq huitièmes
un demi	trois cinquièmes
sept dixièmes	onze centièmes

Pour chaque figure, trouve la fraction représentée par la partie colorée.



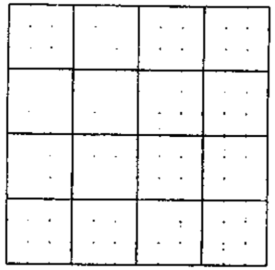
5 ■a Une plaque de chocolat est formée de 12 barres de 4 carrés.
Complète avec des fractions :
1 barre = ... de la plaque.
1 carré = ... de la barre.

■b Une grande plaque de chocolat est composée de 15 barres de 6 carrés.
Dessine-la et trouve le nombre de carrés dans :

$\frac{1}{6}$ de la plaque $\frac{1}{3}$ de la plaque

$\frac{1}{5}$ de la plaque $\frac{1}{6}$ de la barre

6 Dans le carré ci-dessous, il y a 12 x 12, soit 144 petits carrés bleus.
En t'aidant du dessin, trouve les nombres suivants :
$\frac{1}{4}$ de 144 ; $\frac{1}{8}$ de 144 ; $\frac{3}{8}$ de 144 et $\frac{1}{6}$ de 144.

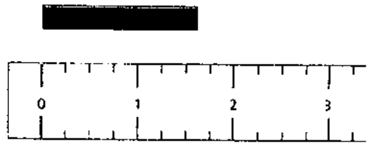


7 Dans une heure, il y a 60 minutes.
Calcule le nombre de minutes dans :

$\frac{1}{2}$ heure $\frac{1}{4}$ d'heure $\frac{3}{4}$ d'heure

$\frac{1}{10}$ d'heure 1 heure et demie

8 Pour mesurer les longueurs de petits objets, Paul utilise une règle graduée. Mais la seconde extrémité de la bande rouge ne tombe pas sur une graduation. Que peut-il faire pour trouver la mesure de cette longueur ?



9 Parmi les fractions suivantes, lesquelles représentent des nombres entiers ?

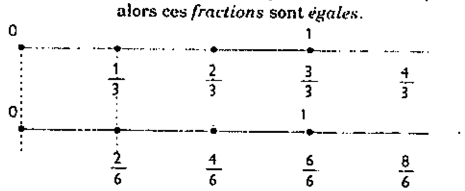
$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{6}{3}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{9}{18}$ $\frac{0}{5}$

$\frac{18}{9}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{9}{4}$ $\frac{8}{4}$ $\frac{7}{1}$ Quels sont ces entiers ?

Je retiens bien

Les fractions égales

Si, pour un même point, on peut trouver *plusieurs écritures fractionnaires*, alors ces *fractions* sont *égales*.



$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ $\frac{3}{3} = \frac{6}{6}$ $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$

La demi-droite graduée ("Je retiens bien") est utilisée pour donner du sens à l'égalité des fractions : un même point peut être codé de plusieurs manières différentes.

L'exercice 5 utilise la fraction dans deux contextes : mesure d'un volume familier (une unité étant fournie), rapport partie/ tout.

> Exercice 5 : la première partie de l'exercice, très dirigée, conduit pas à pas l'élève de la fraction d'une plaque telle qu'il l'a vue dans la première séance du palier, au calcul d'une fraction d'un nombre.[35]

Un exercice invite les élèves à subdiviser une graduation pour mesurer avec plus de précision une bande de papier.

La double-page comporte également des exercices de lecture et d'écriture de fractions en français. Elle s'achève par l'énonciation de la règle de l'égalité des fractions.

Notons que les situations d'emploi des fractions s'enrichissent par rapport à la double-page précédente : mesure d'une bande de papier à l'aide d'une graduation, rapport partie/tout avec nombres plus variés.

Nous trouvons ici la confirmation recherchée : sur l'ensemble des quatre pages, les exercices sont juxtaposés, les uns en renforcement d'une situation déjà présentée, les autres pour enrichir le répertoire des situations-types associées à l'emploi de fractions.

Dans une telle succession, il semble difficile que les élèves contrôlent les écritures mathématiques qu'ils fournissent, sauf à se référer à l'exercice semblable déjà résolu ou à la règle établie en fin de leçon. Le dispositif prévu pour les "ateliers" de soutien en fin de période est cohérent avec ces principes pédagogiques : les élèves ne disposent pas de moyen mathématique interne à la situation qui leur permette de savoir s'ils ont fourni une bonne réponse.

Donnons-en pour exemple l'atelier de soutien n° 2 proposé en fin de période pour les élèves qui n'auraient pas bien réussi les exercices d'évaluation. Les élèves doivent réaliser des mélanges de deux couleurs dans des gobelets et les coder sous forme de fractions.

> Demander au groupe de trouver une méthode pour obtenir par mélange un dégradé de couleur le plus parfait possible entre les deux teintes de bases préparées dans des bouteilles : ainsi, si l'une des bouteilles contient du bleu et l'autre du jaune, essayer d'obtenir toutes les teintes de vert intermédiaires. Une fois la méthode trouvée, placer les gobelets en ligne et remplir les 2 verres des extrémités avec les couleurs de base contenues dans les bouteilles, puis réaliser les mélanges dans les 7 verres du milieu. Exprimer enfin tous les résultats obtenus en utilisant les fractions.
>
> Les enfants peuvent élaborer la méthode suivante (parmi d'autres) : numéroter les gobelets de 0 à 8, puis utiliser un 10e verre sur lequel on marque à l'aide d'un feutre la hauteur d'une mesure élémentaire, réaliser ensuite tous les mélanges en utilisant cette mesure élémentaire : le premier verre contenant 0 mesure de bleu et 8 mesures de jaune ; le deuxième verre contenant 1 mesure de bleu et 7 mesures de jaune ; le troisième verre, 2 mesures de bleu et 6 de jaune, etc.

35 Id.

On obtient ainsi pour le bleu les fractions :
0/8 ; 1/8 ; 2/8 ; 3/8 ; 4/8 ; 5/8 ; 6/8 ; 7/8 ; 8/8

Une autre méthode consiste à préparer le verre du milieu en mélangeant autant de bleu que de jaune (1/2 de bleu), puis à trouver le mélange à faire pour les verres n° 2 et 6 (1/4 de bleu et 3/4 de bleu), etc.

Les fractions obtenues sont donc, pour la couleur bleue :
0 ; 1/8 ; 1/4 ; 3/8 ; 1/2 ; 5/8 ; 3/4 ; 7/8 ; 4/4 que l'on pourra rapprocher de celles obtenues par l'autre groupe pour constater que 1/2 = 1/4, que 3/4 = 6/8, etc. [36]

Remarquons l'ambition de la consigne : trouver *toutes les teintes* de vert intermédiaires, alors qu'il y en a une infinité...

La situation débouche plus facilement sur un codage partie/partie que sur un codage partie/tout. Par exemple, le couple (1,7) peut signifier "1 verre de bleu et 7 verres de jaune". Il paraît peu probable qu'un élève en difficulté pense au couple (1,8) pour représenter "1 verre de bleu et 7 verres de jaune". La liaison avec les situations antérieures d'apprentissage ne peut donc être établie. On peut avoir des doutes sur l'effet d'une telle remédiation.

Le fil conducteur de la progression n'est donc pas ici de construire de nouveaux concepts par la résolution de problèmes, mais plutôt de constituer un répertoire de situations-types et des langages et calculs associés. Les propriétés mathématiques des nouveaux nombres font l'objet de constats, les règles d'emploi étant fournies au fur et à mesure des besoins. Les élèves sont invités à reproduire dans des situations voisines les codages de fractions qui leur ont été présentés. Ce sont les registres sémiotiques qui sous-tendent la progression.

L'étude se poursuit avec les fractions décimales où apparaît l'addition entre un entier et une fraction inférieure à 1, en tant que "décomposition additive des fractions".

1 + 1/5 = 1 + 2/10 = 12/10 [37]

Cette égalité est probablement jugée évidente, puisqu'elle n'est pas commentée.

Dans la double-page où le signe d'addition est introduit (*LdE* p. 94 et 95), toutes les écritures de somme sont d'un genre particulier : un entier + une fraction inférieure à 1. On ne trouve pas des égalités du genre 12/10 = 5/10 + 7/10 : cette "décomposition additive" est, pour l'instant, hors sujet, alors même que le livre du maître évoque le fait que 4 fois l'intervalle de 1/10, c'est 4/10. (*LdM* p. 199).

Le procédé de "décomposition additive" est ensuite étendu aux centièmes. Les décompositions additives se font selon un "format" imposé :
847/100 = 800/100 + 40/100 + 7/100 = 8 + 4/10 + 7/100.

C'est ainsi que sera présentée la liaison entre écriture décimale et fraction décimale, par un changement de codage qui est souvent illustré sur la demi-droite numérique.

[36] *LdM*, p. 237 et 238.
[37] *LdM*, p. 197.

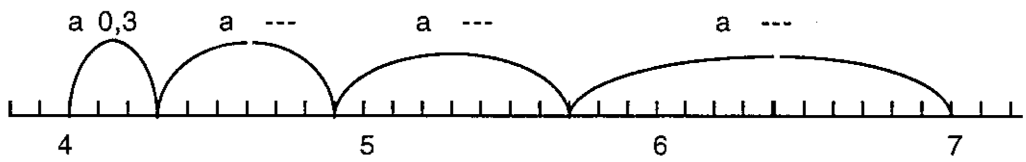
Les nombres décimaux sont ensuite utilisés dans des exercices de conversion dans un contexte de masse, le tableau du système métrique servant d'instrument de contrôle.

La comparaison des décimaux est basée sur le principe de mettre tous les nombres au même format (*LdM* p. 276) : dixièmes, centièmes, etc. Sur quatre pages, un seul exercice pose la question des écarts, le livre du maître proposant de l'exploiter pour définir les approximations par défaut et par excès.

> Pour mesurer la longueur de la cour, Paul l'a parcourue en 96 enjambées d'environ 65 centimètres. Marie a utilisé un décamètre à ruban et a trouvé une longueur de 62,50 mètres. Sur le plan de l'école, le maître lit que cette distance est égale à 62,25 mètres. Qui était le plus près de la réalité ? [38]

Les exercices d'intercalation se feront sur le même principe de mise au même format, sans relation avec l'addition.

Les techniques usuelles d'addition et de soustraction de décimaux sont présentées par analogie avec les calculs faits sur des francs et centimes. L'addition est associée à un schéma qui illustre l'additivité des longueurs.[39]



La liaison entre numération orale des fractions ou décimaux et multiplication n'est pas faite au CM1. Par exemple, 4/10 n'est pas associé à 4 x 1/10 ou 4 x 0,1, bien que cela apparaisse de manière implicite dans les sauts de kangourou de la page 158 (*LdE*).

La calculatrice est évoquée.

> Affiche 34.25 sur ta calculette.
> Comment obtiens-tu 35 en te servant seulement des touches des chiffres et des touches . et + ? [40]

Les fractions usuelles et les décimaux sont ensuite utilisés dans des exercices de conversions de mesures de grandeurs, des calculs de sommes de prix, de longueurs, ainsi que dans des exercices purement numériques traités "à la main" ou avec une calculatrice. La multiplication d'un nombre décimal par un entier est basée sur l'addition répétée.

La liaison entre proportionnalité et fraction n'est pas faite au CM1. "Prendre le quart de" n'est pas associé à un tableau de proportionnalité.

Les problèmes figurant dans les leçons et dans le bilan de fin de période couvrent des genres variés : codage d'aires, de longueurs de segments, de capacités, partage de segments avec guide-âne,

---

38 *LdE*, p. 133.
39 *LdE*, p. 156
40 *LdE*, p. 158.

fractions de nombres, repérage de fractions sur une droite numérique, changements d'écriture (des fractions décimales aux nombres décimaux et l'inverse).

Les "éléments de réponse" que le livre du maître propose ne décrivent pas toujours les moyens mis à la disposition de l'élève pour qu'il soit convaincu. En voici deux exemples [41] .
- Pour le partage d'un segment en parties de mêmes longueurs, l'association 1/4 de 8 cm et 8 : 4 est supposé établie mais on ne voit pas quand.
- Pour repérer un point sur une demi-droite à l'aide d'une fraction, les auteurs suggèrent de revenir à la définition de 1/n, avec n allant de 2 à 7, avec du matériel. Mais ils n'expliquent pas le rapport entre l'additivité des longueurs, les sommes de fractions et la notation des points sur la droite.

3.5- Les caractéristiques de la progression de *Diagonale*

Les auteurs ont constitué un grand répertoire d'exercices et de problèmes où différents sens des fractions et des décimaux interviennent : rapport partie/tout, opérateur linéaire, commensuration, partage de l'unité, graduation d'une demi-droite, partage d'un segment, mesure directe, mesure indirecte. Les exercices sont regroupés en fonction d'une formalisation connue du seul enseignant : les exercices proposés sont juxtaposés, il n'y a pas d'enrichissement progressif des notions par la résolution de problèmes. Cette pédagogie nous paraît très proche du schéma traditionnel cumulatif que décrit Perrin[42]. On peut se demander si les auteurs ne visent pas la connaissance de *l'objet* nombre décimal ou fraction, comme préalable à la résolution de problèmes où ces nombres interviennent comme *outil*[43]. Les décimaux sont indépendants de questions d'approximation. La liaison n'est pas faite au CM1 entre rationnel et proportionnalité.

Du point de vue des *registres sémiotiques* associés aux fractions et aux décimaux, deux formes dominent : la demi-droite numérique, le tableau du système décimal (centaines, dizaines, unités, dixièmes, centièmes, millièmes). Les écritures associées aux fractions et aux décimaux (égalité, comparaison, addition, multiplication par un entier) sont présentées de manière indépendante les unes des autres. Les techniques usuelles de calcul sur les décimaux reposent sur la connaissance des grandeurs familières.

Les *grandeurs* effectivement mises en jeu sont les longueurs et les aires. Les autres grandeurs sont évoquées, sauf dans les ateliers où les élèves peuvent manipuler ou construire effectivement des objets.

La *calculatrice* est présente, les calculs proposés concernant aussi bien des nombres entiers que des nombres décimaux : elle ne joue pas de rôle particulier dans la progression.

Par rapport aux *textes officiels*, les auteurs de *Diagonale* vont au-delà des seules fractions simples figurant dans les objectifs de cycle 3 et s'autorisent, comme beaucoup d'autres, à représenter les nombres décimaux sur une demi-droite numérique. Ce sont les seules libertés qu'ils prennent vis-à-vis des textes officiels.

41 *LdM*, p. 229.

42 Thèse, p. 105 et 106.

43 Au sens de R. Douady.

4- *Cinq sur cinq*, sixième, Hachette, 1994

En sixième, l'étude des décimaux et des fractions suppose une reprise de ce qui est fait à l'école élémentaire avant l'introduction de notions nouvelles. Pour les nouveautés, nous pouvons utiliser la même méthode que celle employée pour les manuels de CM1 : comment la notion nouvelle est introduite, avec quelles formes sémiotiques, sur quelles propriétés connues des élèves elle repose. Cette méthode doit être infléchie pour ce qui traite des révisions des savoirs de l'école élémentaire.

Pour analyser comment s'organise le rappel des savoirs de l'école élémentaire, nous examinerons si les connaissances interviennent de manière contextualisée ou non, comment les règles de calcul ou les propriétés sont rendues plausibles, comment elles sont reliées entre elles, quelles formes langagières ou non langagières sont utilisées. Nous examinerons en particulier si les notions mathématiques rappelées interviennent plutôt comme objet ou comme outil.

L'ouvrage *Cinq sur cinq* est une publication collective dont R. Delord et G. Vinrich ont assuré la coordination, en collaboration avec M. Bourdais et avec la participation d'un professeur de français, D. Fougère.

4.1- Les auteurs et la didactique des mathématiques

L'introduction de l'ouvrage est très succincte et, à la différence des manuels de primaire, ne cite pas de travaux de didactique des mathématiques. Les choix pédagogiques sont présentées de manière générale.

> * Le souci d'établir la continuité avec le cycle 3 de l'école primaire (...)
>
> * Le choix délibéré, pour l'ensemble de l'ouvrage, de s'appuyer sur une véritable activité mathématique de l'élève, gérée par le professeur
> Cette conception prend résolument en compte le rôle constructif, pour ne pas dire essentiel, de l'erreur dans les apprentissages et donc en particulier celui des Mathématiques.
>
> * Une démarche construite autour de la résolution de problème
>
> Elle résulte du constat suivant :
> Il ne peut y avoir véritable activité mathématique de l'élève :
> . si celui-ci se trouve en situation permanente d'échec ;
> . s'il ne dispose d'aucun moyen et d'aucune méthode pour amorcer la résolution d'un problème.
>
> D'où l'existence, dans chaque chapitre, de travaux pratiques accompagnés de méthodes de résolution de problème. [44]

Nous savons que R. Delord a été responsable de la commission inter-IREM "premier cycle", que G. Vinrich travaille au sein du même institut universitaire de formation des maîtres que G. Brousseau et qu'il a publié comme co-auteur des analyses de problèmes de concours de professeurs des écoles dans une perspective didactique. Nous pouvons donc affirmer que l'équipe de rédaction de *Cinq sur Cinq* connaît les travaux en didactique sur les décimaux et, au premier chef, ceux de G. Brousseau [45].

---

[44] Page 5.

[45] On peut se demander les raisons de leur silence sur leur proximité avec la didactique : cela signifie-t-il qu'elle ne serait pas un bon argument de légitimation auprès des enseignants de l'enseignement secondaire ?

4.2- Les rubriques du manuel

L'ouvrage est découpé en 5 périodes, chaque période comprenant 4 chapitres (2 sur les nombres, 2 de géométrie) et une partie de bilan, avec renvois pour quelques exercices à des aides situées en fin de manuel.

L'ouvrage se distingue d'autres parus à la même époque par le traitement systématique, dans la partie "cours", d'exercices faisant intervenir la lecture d'énoncés comme textes, et par le traitement de la partie du programme "gestion de données" tout au long de l'ouvrage.

Chaque chapitre comporte 4 pages dont 1 de travaux pratiques et exercices résolus, qui sont suivies de 4 ou 6 pages d'exercices et problèmes selon un ordre commenté dans la page de couverture :

> Vrai ou faux ? Occasion privilégiée de tester ses connaissances (...)
> Lire et comprendre des énoncés. Exercices importants plus particulièrement destinés à
> - reconnaître, trier et traiter diverses informations,
> - formuler, critiquer, argumenter une démarche (...)
>
> Exercices et problèmes classés selon les points principaux du chapitre.
> Le défi du chapitre.

Les bilans comportent tous 7 pages. Cette structure systématique est le résultat d'une commande de l'éditeur [46].

Au total, 76 pages de cours sont consacrées à l'enseignement des décimaux, des fractions et de la proportionnalité. Le sommaire laisse entendre que ce sont les propriétés des décimaux comme "objet" qui guident les auteurs.

> Période 1
> 1- Lire et écrire les décimaux.
> 2- Additionner, soustraire, multiplier. (...)
>
> Période 2
> 5- Ranger les décimaux.
> 6- Diviser deux entiers. (...)
>
> Période 3
> 9- Diviser deux décimaux - Écritures fractionnaires.
> 10- Prendre une fraction de. (...)
>
> Période 4
> 13- Appliquer un pourcentage.
> 14- Le point sur la proportionnalité.

4.3- Le traitement des révisions

Dans le chapitre 1 *Lire et écrire les décimaux*, on trouve deux exemples contextualisés, dans lesquels les décimaux sont des recodages d'entiers (millions de véhicules, centaines de milliers de personnes) présentés en tableau ou sous forme de graphique. Le passage entre écriture décimale et écriture fractionnaire est fait par le biais du tableau décimal. Un schéma avec flèches sert de support à

[46] Entretien avec l'un des auteurs (avril 1994).

la règle de décalage des zéros dans la multiplication ou la division d'un décimal par 10, 100, 1000. Il n'y a pas de liaison établie entre la division exacte de 345 par 100 et l'écriture fractionnaire 345/100.

Le chapitre 2 *Additionner, soustraire, multiplier* rappelle les techniques opératoires, relie la multiplication par 0,1 et la division par 10 de manière formelle, par des écritures d'égalité. Le calcul d'ordre de grandeur est fait en soi : il ne répond pas à une nécessité de contrôle. Les énoncés contextualisés traitent de prix et de longueurs.

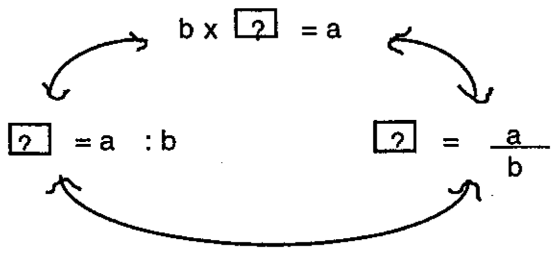
Le chapitre 5 *Ranger les décimaux* rappelle les règles alphabétiques de la comparaison de décimaux, l'utilisation d'un croquis de zoom illustre la manière d'intercaler un décimal entre deux décimaux ayant le même nombre de chiffres après la virgule. L'exercice de troncature et d'arrondi est fait pour lui-même, il n'est pas une réponse à un problème. Il n'y a pas de lien entre la comparaison et l'addition, ni mesure d'écarts entre des décimaux rangés par ordre croissant. Deux exercices sont contextualisés par des grandeurs : longueurs, prix, consommation d'électricité.

Le chapitre 6 *Diviser deux entiers* contextualise la division euclidienne (interprétation du quotient et du reste dans un contexte de prix), finalise la recherche du nombre de chiffres d'un quotient. Il rappelle deux techniques de division, celle où l'on "s'arrête au quotient entier" ou celle où l'on "continue après la virgule au quotient", sans relier ces techniques à des types de problèmes différents.

Dans cette période de révision, les règles de calcul sont présentées le plus souvent indépendamment les unes des autres. Des contextualisations sont présentées (prix, longueurs, en particulier). Il n'y a pas de problème qui justifie la technique de division que l'on continue après la virgule, les troncatures ou les arrondis de nombres décimaux. Il n'y a pas de position unique dans le traitement des révisions : les décimaux sont le plus souvent pris pour eux-mêmes (objet) mais sont parfois contextualisés (outil).

4.4- Les notions nouvelles du programme

Le chapitre 9 traite de la division de deux décimaux et introduit les écritures fractionnaires. La notation fractionnaire est liée à une question de commensuration : division d'une grandeur dont on connaît la mesure par un nombre entier [47]. Le résultat de cette division est donné par la technique de la division que l'on pousse, la notation associée est celle de la division de l'école primaire ou la notation fractionnaire. Les travaux pratiques portent sur des écritures décontextualisées : conversions de décimaux en fractions décimales, fabrication de quotients égaux entre eux. La décontextualisation proposée est rapide. De nombreuses règles apparaissent dans le corps du texte et les commentaires de bords de pages, ainsi que des schémas.



[47] Page 100.

$$\frac{7{,}85}{0{,}1} \underset{\times 10}{\overset{\times 10}{=}} \frac{78{,}5}{1}$$

Diviser un nombre par 0,1 revient à le multiplier par 10.
Diviser un nombre par 0,01 revient à le multiplier par 100.
Diviser un nombre par 0,001 revient à le multiplier par 1000.

Lorsque la division ne se termine pas, la seule façon de donner l'écriture exacte du quotient est l'écriture fractionnaire. (...)

Ces égalités prouvent que le quotient ne change pas lorsqu'on multiplie ou on divise à la fois le diviseur et le dividende par 10, 100 ou ... (...)

Pour diviser deux décimaux, on se ramène à une division par un nombre entier en multipliant le diviseur et le dividende par 10, ou par 100 ou...
Pour additionner ou pour soustraire des fractions décimales, il faut obligatoirement le même dénominateur. Pour les multiplier, ce n'est pas obligatoire. [48]

Le chapitre 10 s'intitule *Prendre une fraction de....* Des fractions usuelles sont présentées dans des contextes de durées et de longueurs (demi-heure, quart de la longueur de la bougie exprimée en centimètres). Leur emploi est étendu à des fractions moins usuelles dans les mêmes contextes : 1/10 h, 3/10 h, 7/12 h ; 9/8 du segment [AB], 5/4 du segment [AB], le segment [AB] mesurant 8 carreaux. On trouve également des fractions d'aires de surfaces déjà découpées (11/24 d'un rectangle, 5/6 d'un disque, 4/16 ou 1/4 d'un triangle), enfin des fractions simples de litres (1/2, 1/5, 3/10).

Les propriétés additives des grandeurs ne sont pas indiquées : 3/4 du segment [AB], ce n'est pas associé à 1/4 + 1/4 + 1/4. On ne voit pas écrit 4 x 1/4 = 1.

En revanche, trois méthodes de calcul sont présentées sur trois exemples différents, dont deux sont motivées par un énoncé portant sur des longueurs. Prendre les 3/5 d'une quantité est associé à la composition des opérateurs : 5 et x 3, ou x 3 et : 5, ou encore c'est multiplier par 3/5 dont on connaît la valeur exacte 0,6. Il n'y a pas de traduction de ces multiplications dans le contexte des longueurs.

Prendre les 3/5 de 60 consiste à multiplier 60 par 3/5. (...)

60 x 3/5 = (60 : 5) x 3 = 12 x 3 = 36 (...)

60 x 3/5 = (60 x 3) : 5 = 180 : 5 = 36 (...)

60 x 3/5 = 60 x 0,6 = 36 [49]

L'identification des écritures du genre 24 x 13/9, (24 x 13) / 9 et 24/9 x 13 est supposée évidente au niveau formel, alors que dans la situation d'introduction le multiplicateur fractionnaire a été écrit à droite.

[48] P. 101, 102 et 103.

[49] P. 110.

La gestion des arrondis est explicitement évoquée dans les calculs à la main. L'élève est invité à constater des différences de résultats. Le commentaire du livre est bref.

> x = (24/9) x 13
> x ≈ 2,67 x 13
> x ≈ 34,71 (L'erreur commise sur la division est multipliée par 13 !) [50]

Appliquer un pourcentage est présenté au chapitre 13 comme une conséquence du travail fait dans les leçons précédentes.

> Calculer les 23% de 7500 revient à multiplier 7500 par 23/100. Les trois méthodes de calcul vues au chapitre 10, page 100, sont possibles, en particulier la méthode 3 : 7500 x 0,23. [51]

Le chapitre 14 *Le point sur la proportionnalité* débute par l'étude d'une famille de rectangles dont un côté a une mesure fixe 1,5 cm. L'élève est invité à calculer les demi-périmètres et les aires de ces rectangles, puis à représenter sur des graphiques la relation entre le deuxième côté et le demi-périmètre, et la relation entre le deuxième côté et l'aire. On reconnaît ici le début de la séquence proposée par Douady & Perrin pour résoudre de manière approchée un problème, mais ici, les graphiques sont constitués pour eux-mêmes.

La relation entre un tableau de proportionnalité et l'écriture de fractions est supposée évidente, sans passer par l'image de 1.

15	20	35
18	24	42

x 1,2

18/15 = 24/20 = 42/35 = 1,2

En particulier, on ne voit pas écrit 15 x (18/15) = 18. Il est vrai que, dans les exercices présentés, le multiplicateur, décimal, peut être déterminé à la calculatrice.

4.5- Les caractéristiques de *Cinq sur cinq*

L'ouvrage s'inscrit dans les limites fixées par les *programmes officiels*.

Ce qui justifie l'introduction des quotients de décimaux, ce sont des problèmes de commensuration, l'unité de grandeur étant déjà fixée dans le système métrique. La commensuration est évoquée et non effective.

Les *grandeurs* sont évoquées sans qu'il y ait de fabrication effective d'objets dont la mesure serait une fraction. Visiblement, le but n'est pas ici la mesure de grandeurs : il s'agit de donner du sens au produit d'un nombre par un quotient de décimaux. La situation d'introduction est rapidement

50 P. 111.

51 P. 151.

oubliée. Les égalités sont exprimées dans un cadre formel : leurs propriétés ne sont pas recontextualisées dans des problèmes voisins de ceux qui avaient servi d'introduction.

Les *grandeurs familières* sont évoquées lors des problèmes de proportionnalité.

La *calculatrice* ne joue aucun rôle dans la progression.

Du point de vue des *registres sémiotiques* associés aux fractions et aux décimaux, deux représentations dominent : les schémas avec flèches et les égalités de fractions. Des graphiques sont également présents.

La progression de *Cinq sur Cinq* paraît résulter d'un compromis entre les points de vue "outil" et "objet" : la résolution de problèmes contextualisés n'est pas exploitée jusqu'au bout, probablement parce qu'elle déboucherait sur des propriétés non inscrites au programme de sixième ; les décontextualisations sont rapides ; les recontextualisations ne sont pas proposées dans la partie du cours. Beaucoup de règles sont à retenir, et peu de moyens, à part la calculatrice, sont fournis pour en contrôler l'emploi.

On retrouve certains points communs entre la progression Brousseau & Brousseau et la partie "cours" de ce manuel : la situation initiale de commensuration (modifiée), et de nombreux schémas fléchés pour représenter les applications linéaires. Mais les auteurs de *Cinq sur Cinq* traitent les situations de proportionnalité du manière différente de la progression Brousseau & Brousseau : en particulier ils travaillent de manière formelle sur les nombres, sans retour aux grandeurs pour en contrôler les propriétés.

5- *Apprentissages mathématiques*, sixième, Hatier, 1991

L'ouvrage *Apprentissages mathématiques*, rédigé par l'équipe *ERMEL* de l'institut national de recherche pédagogique (INRP), n'est pas à proprement parler un manuel. Il ne traite qu'une partie du programme de sixième : quotients et proportionnalité d'une part, symétrie orthogonale d'autre part. De plus, son lecteur-cible n'est pas l'élève de sixième mais son enseignant : les auteurs proposent un plan de cours détaillé, avec les suggestions de devoirs correspondantes.

La mise au point des progressions et des situations a été faite par 14 enseignants : R. Charnay, J. Colomb, G. Combier, P. Cornet, M. Goutodier, J.C. Guillaume, A. Ladevèze, G. Lévy, C. Martin, M.F. Odorico, G. Perrot, A. Pressiat, A. Ragot et Th. Raisonnier. Quatre collèges ont été associés à leur expérimentation (une année de pré-expérimentation, une année d'expérimentation, environ deux cents élèves). Bien que l'ouvrage soit issu d'une expérimentation conduite dans une vingtaine de classes de sixième, il ne ressemble pas à un rapport de recherche. Il n'y a pas de bibliographie et l'expérimentation elle-même n'est pas datée. Seuls l'exposé des motifs (p. 14 à 50) et les résultats d'une évaluation des élèves (p. 165 à 180) évoquent les origines de l'ouvrage [52].

Nous l'avons retenu comme nous aurions retenu un livre du maître, parce que les expérimentations décrites nous semblent avoir été conduites dans un esprit très proche de celui des ingénieries de référence.

52 La rédaction de l'ouvrage a été assurée par André Pressiat.

5.1- Les auteurs et la didactique des mathématiques

Citons la page de couverture de l'ouvrage :

> Comment le professeur peut-il faire pour construire et mettre au point des activités
> * prenant en compte les acquis antérieurs des élèves,
> * faisant émerger leurs conceptions spontanées,
> * légitimant l'introduction d'outils nouveaux avant de les faire fonctionner,
> * prenant en charge leur formulation sans négliger pour autant et considérer comme "allant de soi"
>   - l'assimilation des ces outils,
>   - leur disponibilité et leur mobilisation dans des contextes nouveaux ?
>
> Le but de cet ouvrage est d'abord de fournir des exemples d'activités répondant à ce cahier des charges dans le cadre du programme actuel de la classe de sixième.

Le but explicite des auteurs est de passer d'un modèle d'enseignement où les vérités mathématiques seraient progressivement dévoilées aux élèves à un modèle déclaré "constructiviste" et conforme aux orientations préconisées par l'inspection générale de mathématiques.

> Les mathématiques ne se découvrent pas, elles se font. Faire des mathématiques, c'est entrer dans une activité de problématisation, d'élaboration de conjectures, d'essais, d'approximations, de rectifications, de généralisations, de formulation, de formalisation.(...)
>
> Dans une telle perspective, la signification de l'erreur se transforme : l'erreur peut être une composante du processus d'apprentissage. Dans ce cas, elle renseigne le professeur sur les connaissances et les représentations auxquelles l'élève rattache la tâche proposée, sur les outils qu'il utilise pour la traiter, sur la manière dont il affronte les difficultés internes au savoir et dont il réorganise ce qu'il sait déjà.

Les premières pages de l'ouvrage évoquent des expressions courantes en didactique des mathématiques : par exemple, champ conceptuel de la notion de quotient de décimaux, obstacles, décontextualisation, recontextualisation (p. 29 à 37), variables didactiques (tout au long de l'ouvrage). Les auteurs citent l'agrandissement du puzzle de Brousseau (p. 64). Nous pouvons en déduire qu'ils connaissent les travaux des didacticiens sur l'enseignement des décimaux.

Les auteurs sont conscients que leur ouvrage se situe en rupture avec les pratiques habituelles. Ils décrivent deux "contrats", celui des anciens programmes où l'enseignant expose le savoir, l'élève écoute, repère, mémorise, essaie de reproduire le bon modèle après l'avoir reconnu (p. 18), celui des nouveaux programmes de 1985 où l'enseignant propose des situations-problèmes évolutives, où l'élève cherche, émet des conjectures, contrôle ses résultats, découvre et assimile de nouvelles notions (p. 24).

Les moyens et méthodes recommandés font l'objet d'un long développement (p. 28 à 36). La situation doit être évolutive. La situation d'amorçage doit permettre à l'enseignant de repérer les savoirs des élèves. L'enseignant introduit volontairement des obstacles pour provoquer la recherche de la part des élèves. L'émergence de règles est considérée comme un moment essentiel pour distinguer l'outil, la règle, de ses utilisations : ce sont les élèves qui doivent en proposer des formulations. Le but final n'est pas la production de règles et d'outils, mais leur utilisation pour résoudre une catégorie de problèmes. Pour les auteurs, seule doit être soumise à évaluation la capacité à utiliser ces règles et ces outils dans des contextes où ils sont efficaces.

Nous reconnaissons dans ces déclarations une position semblable à celle prise par Brousseau & Brousseau ou Douady & Perrin dans leurs ingénieries.

5.2- Les choix des auteurs

Les auteurs disent avoir pris en compte les contraintes suivantes :

> - (le) respect scrupuleux des programmes et instructions officielles,
> - (le) respect des conditions ordinaires de fonctionnement d'un collège (structures, horaires, notation...)
> - (l')emploi de méthodes et de moyens peu coûteux.[53]

Ils s'inscrivent donc dans une position de compromis : l'effort que leur méthode réclame de la part de l'enseignant leur paraît suffisamment limité.

Pour la partie numérique de leur ouvrage, le auteurs organisent leur enseignement autour de la notion de quotient décimal. Cette notion leur paraît centrale dans le nouveau programme, puisque présente, selon eux, dans "la moitié du programme" de manière explicite ou implicite (p. 28). Ils traitent de manière conjointe les quotients de décimaux et la proportionnalité en une série de 21 séances de 55 minutes.

Chaque séance regroupe une, deux ou trois activités. Chaque activité fait l'objet d'une présentation brève qui en indique le statut :

> - amorce de la situation,
> - mise en place de l'obstacle voulu,
> - identification des variables didactiques pertinentes... [54]

Quand l'obstacle voulu a nécessité des choix particuliers, un signal est mis dans la marge, qui avertit des dangers que courrait l'enseignant s'il modifiait ces choix sans précaution.

Nous sommes donc en présence d'un ouvrage qui, visiblement, cherche à faciliter l'entrée du lecteur dans le type de conduites de séances qui sont celles des progressions de référence. Le vocabulaire, quand il est technique, est paraphrasé ; des exemples sont fournis.

5.3- La progression sur les décimaux

Les activités sont structurées selon neuf "situations" décrites ci-après (entre parenthèses le nombre de séances de 55 minutes) :

> 1- Non!, la multiplication n'agrandit pas forcément. (2)
> 2- Puzzle (agrandissement, réduction). L'addition n'est pas la seule opération qui "agrandit." (2)
> 3- Effet sur le résultat d'une division d'une même opération sur son dividende et son diviseur.

[53] P. 27.

[54] P. 48.

Légitimation de l'algorithme de la division d'un décimal par un décimal. (4)
4- Introduction des quotients de décimaux (comme solution d'équation). Écriture fractionnaire. Cas particulier des décimaux. (5)
5- Introduction de la bande à double graduation.
- familiarisation : de deux graduations à la double graduation.
- utilisation dans des problèmes de proportionnalité.
6- Problèmes relevant de la proportionnalité. (2)
- Inventaire des procédures connues.
Commodité comparée - Adéquation au problème.
- Utilisation de la double graduation. (2)
7- Multiplication d'un décimal par un quotient de décimaux. (1)
8- Exemples et contre-exemples de grandeurs proportionnelles. (1)
9- Multiplication d'un décimal par un quotient de décimaux et problèmes de proportionnalité. (1) [55]

Cette seule énumération des séances montre que les grandeurs effectivement travaillées se limitent aux longueurs : lors de l'agrandissement ou la réduction du puzzle (situation 2) et au moment de l'utilisation de la double graduation (situation 6).

Examinons les quatre premières situations conduisant à la notion de quotient de décimaux.

La situation 1 a pour but de mettre en évidence le fait que la multiplication n'agrandit pas toujours (p. 54). L'activité d'amorçage consiste à faire des calculs approchés de produits dans des contextes familiers (prix au litre, quantité de litres ; prix au kilo, masse ; aire d'un rectangle). Elle se poursuit dans un cadre formel avec des nombres plus petits que 1. L'activité suivante demande de ranger par ordre croissant des produits qui ont un facteur commun, enfin d'intercaler un produit facile à calculer mentalement entre deux produits ayant un facteur commun. Le renforcement terminal est fait dans un contexte formel.

La situation 2 traite de l'agrandissement et de la réduction du puzzle (p. 64). Cette situation est également rattachée à l'étude de la proportionnalité. Le puzzle fourni présente moins de caractéristiques que celles recommandées par Douady & Perrin : les bords du puzzle correspondent chacun à deux pièces. Mais le puzzle lui-même comportant un rectangle et deux trapèzes rectangles, les procédures additives peuvent être rejetées après tentative de reconstruction du puzzle agrandi. Les commentaires présentés sont peu détaillés sur les moyens de faire émerger les multiplicateurs décimaux.

On pourra classer les méthodes :
- celles qui aboutissent,
- celles qui se ressemblent,
- ...

Pour expliciter les méthodes utilisées, on pourra utiliser les diagrammes suivants :

4 ----> 4 x 1,5 ou □ ----> □ x 1,5

4 ----> 4 + (4 : 2) ou □ ----> □ + (□ : 2) [56]

[55] P. 30.

[56] P. 67.

L'activité suivante porte sur une réduction du même puzzle. La synthèse suggérée porte sur les procédés de calculs. Les uns sont économiques (multiplication par un nombre décimal, 1,5 ou 0,4), les autres utilisent des additions et des soustractions, mais pas toujours les mêmes.

> L'idée de faire une addition pour agrandir, une soustraction pour rétrécir, n'est pas mauvaise ! Mais il n'est pas possible de trouver les dimensions recherchées en faisant subir aux dimensions initiales la même addition ou la même soustraction :
> à une dimension, on ajoute cette dimension divisée par 2 (activité 1)
> à une dimension, on soustrait cette dimension divisée par 5 puis multipliée par 3, par exemple (activité 2).
>
> On peut donc réussir, mais le procédé est plus compliqué :
> - il fait intervenir d'autres opérations que les additions ou soustractions,
> - le nombre que l'on ajoute ou soustrait n'est pas toujours le même , il dépend de la dimension initiale considérée. Sinon, les proportions du puzzle ne sont pas conservées...[57]

L'exploitation de la situation du puzzle n'insiste pas sur les propriétés de proportionnalité, probablement parce que le traitement de ce type de questions est prévu plus tard (situation 6).

Les deux situations suivantes sont traitées dans le seul cadre numérique, sans contextualisation par des grandeurs. La situation 3 a pour but de faire apparaître, sur le résultat d'une division, l'effet d'une même opération sur son dividende et/ou son diviseur, et de légitimer la technique opératoire concernant la division des décimaux "à la main" (nouveauté en sixième). Les nombres sont choisis pour favoriser le calcul mental : la calculatrice est interdite et sert uniquement à contrôler le résultat.

C'est dans la situation 4 que sont introduits les quotients de décimaux. L'activité 1 porte sur la résolution d'équations de type a x ... = b pour lesquelles il existe une solution décimale, toutes techniques étant permises. Les équations sont données sans connexion avec des problèmes qui leur auraient donnée naissance. Après avoir suggéré que les divisions "à la main" fournissent des quotients périodiques, l'enseignant suggère de résoudre à la calculatrice des équations de type a x .... = b, pour lesquelles la solution n'est plus décimale. La notation fractionnaire est alors introduite.

On retrouve ici une formulation des programmes officiels :

> Le quotient *a/b* de deux nombres décimaux est un nombre qui multiplié par *b* donne *a*. On ne change pas le quotient quand on multiplie *a* et *b* par un même nombre non nul. [58]

Pour les auteurs, ce n'est cependant pas le seul statut qu'ils souhaitent donner à cette écriture. Ils signalent la complexité des significations que l'on peut associer à ce type de désignation.

> Remarque
> Le professeur n'oubliera pas d'insister sur le **langage oral** utilisé : le quotient de 17 par 11, que l'on note 17/11, est lu
> "quotient de 17 par 11",

[57] P. 68 et 69.
[58] Paragraphe 3.

mais aussi, beaucoup plus souvent
"17 divisé par 11"
ou encore "17 sur 11"
ou encore plus souvent "dix-sept onzièmes".

La dernière façon d'évoquer oralement ce quotient est certainement la plus fréquente. Pourtant rien dans ce qui précède ne la légitime et bien des "blocages" peuvent venir de là.

En effet, le dictionnaire donne du "onzième" la définition suivante "ce qui est contenu onze fois dans un tout", définition qui fait clairement allusion à la fraction-mesure, point de vue que nous n'avons pas exploité ici.
Onze onzièmes d'un tout, c'est ce tout.
Onze fois dix-sept onzièmes d'un tout, cela fait dix-sept fois ce tout.

Il est indispensable de **faire abstraction de ce fameux "tout" du dictionnaire** pour arriver à l'énoncé qui nous intéresse :
"En multipliant le nombre dix-sept onzièmes par onze, on obtient le nombre dix-sept".

Cette abstraction est-elle vraiment anodine ?
Le vocabulaire suivant, peu utilisé, permettrait peut-être de contourner cette difficulté : pourquoi ne pas appeler "le onzième de dix-sept" le quotient de dix-sept par onze ?

Dix-sept joue le rôle du "tout" (...) et le onzième de dix-sept apparaît comme ce qui est contenu onze fois dans dix-sept, ce qui est très proche de la définition adoptée pour le **quotient de dix-sept par onze : nombre qui, multipli par onze, donne dix-sept.** [59]

Ce long développement est pour nous l'indice d'un malaise. Alors que les mots division, quotient sont associés à l'école primaire à des problèmes concrets de partage, ils semblent relever ici exclusivement du domaine du calcul. Les auteurs montrent ici qu'ils souhaitent privilégier la maîtrise des écritures symboliques au détriment de la liaison avec les grandeurs. Pourtant ils reconnaissent le poids des désignations orales familières des fractions, désignations qui renvoient à des partages d'un tout. Ce poids est décrit comme un inconvénient : il faut en "faire abstraction" pour arriver à l'énoncé jugé intéressant...

Quelques pages plus loin, les auteurs insistent d'ailleurs sur les relations formelles entre équation et division :

(...) il est souhaitable de réserver du temps à des exercices dont le but est d'assurer le lien entre :
- équation du type a x ... = b et division,
- division et quotient,
- quotient et équation de type a x ... = b
La résolution de ces exercices fera ressortir clairement

1° que le bon réflexe face à une équation du type a x ... = b ou ... x a = b, c'est de **penser à diviser b par a.**

- *A la main (ou mentalement si possible)*
. Si la division faite à la main "tombe juste", (...) le quotient est la solution de l'équation.
. Sinon, on peut la continuer aussi loin que l'on veut et obtenir des valeurs

59 P. 85, souligné par les auteurs.

approchées de la solution à la précision que l'on souhaite.

- *A la machine,*
On obtient toujours une "bonne" valeur approchée de la solution. Mais on ne sait pas s'il s'agit de la valeur exacte...

2° sans oublier que **la solution de l'équation**, indépendamment des techniques permettant de la calculer de manière exacte ou approchée peut toujours s'écrire sous forme fractionnaire **b/a** et s'appelle **quotient de b par a.** [60]

L'étude s'achève sur des changements d'écriture : une même solution d'équation peut être représentée par différents quotients, parmi lesquels on trouve les fractions décimales. Les auteurs confirment donc que le problème associé à la notion de quotient de décimal est la résolution d'une équation du type a x ... = b, dans un cadre exclusivement formel, avec des techniques de calcul associées (à la main, à la calculatrice).

On trouve dans l'ouvrage les mentions de valeur exacte, de valeur approchée, de précision, mais il n'y a pas de représentation d'intervalles qui soient associés. La précision, pour l'élève, sera probablement le nombre de chiffres qu'il fera apparaître et non l'estimation de la distance entre la valeur approchée et la valeur exacte. Il n'y a pas d'exercice où, pour deux quotients différents (dans l'écriture et dans la "valeur"), la calculatrice afficherait la même suite de chiffres. Il est vrai que le programme officiel de sixième ne comporte pas de comparaison de quotients de décimaux (sauf l'égalité).

Nous reconnaissons ici la constitution d'un *objet* mathématique, le quotient de décimaux, dont l'utilisation pour résoudre des problèmes apparaîtra plus tard (proportionnalité) et dont le statut de nombre (possibilité de comparer deux quotients de décimaux) n'est qu'ébauché. Cette vision nous paraît résulter du respect des programmes officiels.

Examinons maintenant la série de situations concernant la proportionnalité. Nous avons vu que l'agrandissement et la réduction d'un puzzle ont été faits dans la partie qui conduisait à la notion de quotient de décimaux.

Les auteurs invitent tout d'abord à revoir la graduation d'une demi-droite, dont ils pensent qu'elle a déjà été traitée à l'école primaire. Après avoir fait graduer une demi-droite en centimètres, ils invitent à indiquer la position de certains nombres (10 ; 15 ; 20 ; 25 ; 12,5 ; 24 ; 17) sur une demi-droite où les points 0 et 5 sont situés à 2 cm l'un de l'autre. Les auteurs invitent à donner des noms aux points, à parler de longueurs de segments et à mettre en évidence :

> (...) la proportionnalité entre les abscisses des points M de la demi-droite et les mesures des longueurs des segments [OM], et ceci, quelle que soit l'unité de longueur choisie. [61]

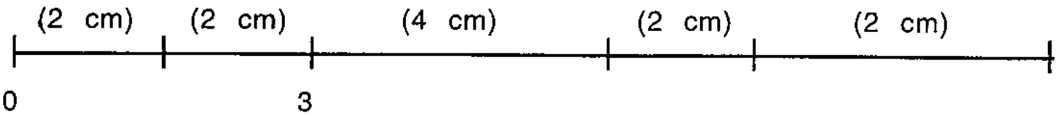
Cette proportionnalité sera décrite en langage naturel : il n'y a ni tableau ni représentation fléchée qui associent les longueurs des segments et les abscisses des points. Donnons-en un exemple.

---

60 P. 88, souligné par les auteurs.

61 P. 96.

Activité 3 : Lire un nombre sur une demi-droite graduée.



Mise en œuvre

On appelle respectivement O, A, B, C, D, E, les points qui interviennent de gauche à droite.

La longueur du segment [OB] est 4 cm et l'abscisse de B est 3,
donc, puisque [OA] a pour longueur 2 cm, A a pour abscisse 1,5. Puisque [OC] a pour longueur 8 cm, C a pour abscisse 6.

La longueur de [OF] est la somme de celles de [OC] et [OA].
C a pour abscisse 6, A a pour abscisse 1,5 ; donc D a pour abscisse 6 + 1,5 c'est-à-dire 7,5... [62]

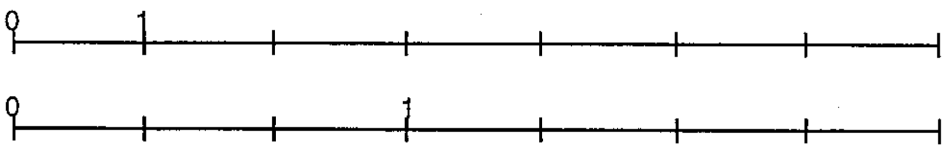
L'activité suivante propose de placer approximativement des nombres sur une demi-droite, l'écart entre 0 et 17 étant de 5 cm.

Les activités qui viennent d'être décrites montrent que les auteurs supposent la remise en mémoire de techniques de graduations basées sur des propriétés "scalaires" de la correspondance, comme si elles allaient de soi . En fait, ils recommandent de proposer aux élèves des activités semblables en travail à la maison "sur une assez longue durée" (p. 97).

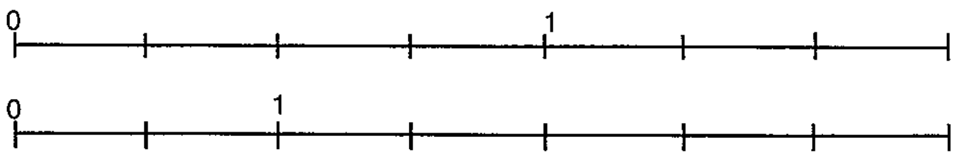
Toute la progression sur la proportionnalité va s'appuyer sur une représentation privilégiée : la double-bande, instrument qui permet de représenter les grandeurs qui se correspondent dans une relation de proportionnalité. Dans un premier temps, les élèves vont être entraînés à compléter la graduation de doubles-bandes, sans référence explicite aux longueurs.[63]

Ecris le nombre qui convient à chaque point.

Activité 1



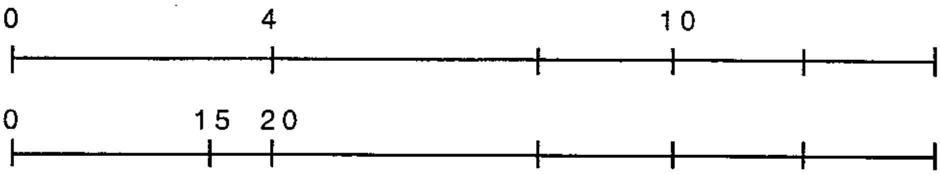
Activité 2



62 P. 96.

63 P. 99.

Activité 3



L'énoncé suivant ne propose pas de double-bande, mais la succession des activités provoquera probablement l'emploi de cet outil organisateur d'information :

> Activité 4
> Sur une carte, 20 km sont représentés par 4 cm. Par quelle longueur seront représentés 15 km ? Quelle longueur représentent 10 cm ?[64]

Après une double-bande "formelle", vient un énoncé, formulé sans double-bande : 30 F de remise pour 100 F d'achat. Viennent ensuite des énoncés de type masse/prix, le prix au kilogramme étant fourni, avec double-bande ; puis des énoncés de durée (avec fractions d'heures) par rapport à des prix, sans double-bande.[65]

Les deux séances suivantes sont consacrées à des synthèses. Les auteurs explicitent pour les enseignants les principales procédures employées par les élèves dans le langage des doubles-bandes et dans celui des tableaux (voir photocopie ci-après).

La procédure 1 est basée sur le fait que "pour aller de 2 à 5, on multiplie par 5/2", ce qui représenté par une flèche dont la valeur est recopiée entre 3 et le point à calculer. Cette propriété multiplicative a été vue dans des cas intuitifs où le multiplicateur était entier. L'extension à un multiplicateur rationnel n'a pas fait l'objet de travaux particuliers.

La procédure 2, qui passe par l'image de l'unité, fait partie des procédés intuitifs souvent utilisés à l'école primaire.

La procédure 3 est basée sur le fait que dans une proportionnalité le multiplicateur est constant. Cette propriété a été vue seulement pour des multiplicateurs entiers ou des "opérateurs à diviser" entiers. Nous n'avons pas vu, dans l'ouvrage, où était traitée la liaison entre multiplier par 1/n et diviser par n.

La procédure 4 est une procédure mixte très souvent employée à l'école primaire.

La procédure 5 dite du produit en croix est rejetée par les auteurs, car elle ne permet pas de s'appuyer sur la signification concrète des opérations effectuées.

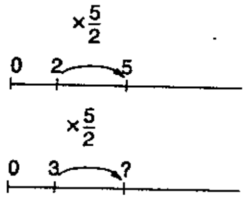
Les trois premières procédures leur paraissent devoir être privilégiées : d'ailleurs les auteurs représenteront souvent les informations dans un tableau à 4 cases. Ce sont aussi les seules qui conduisent à réutiliser les quotients de décimaux introduits dans la première série de séances.

---

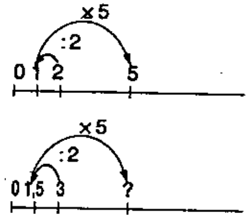
64 Id.

65 P. 101.

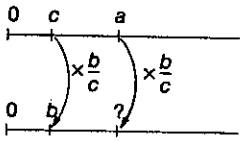
Procédure ①



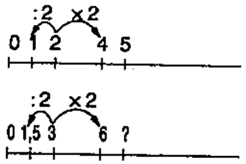
Procédure ②



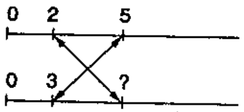
Procédure ③

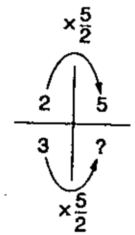


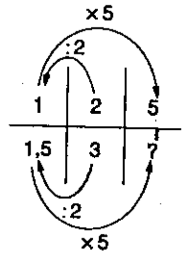
Procédure ④

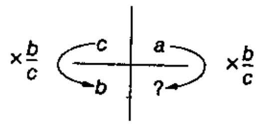


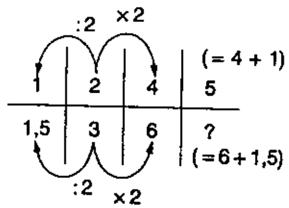
Procédure ⑤











(2×?=3×5)

2	5
3	?

Procédure ①

On obtient x' en multipliant x par le quotient de x' par x.

Or f est linéaire et, particulièrement, elle est homogène : quels que soient les nombres k, u, $f(ku) = kf(u)$.
Donc, $f(\frac{x'}{x}\,x) = \frac{x'}{x}\,f(x)$ autrement dit,

on obtient $f(x')$ en multipliant $f(x)$ par le quotient de x' par x.

Procédure ②

Elle utilise l'homogénéité de f deux fois de suite, en faisant jouer un rôle important au nombre 1 :

- On obtient 1 en divisant x par x (*en le multipliant par le quotient de 1 par x*) or f est homogène, donc on obtient $f(1)$ en divisant $f(x)$ par x (*en le multipliant par le quotient de 1 par x*).
- On obtient x' en multipliant 1 par x'. Or f est homogène, donc on obtient $f(x')$ en multipliant $f(1)$ par x'.

Procédure ③

Elle utilise le fait que f est une fonction linéaire, qui à tout nombre u associe le produit de u par un nombre a indépendant de u.
a peut être déterminé à l'aide d'un seul couple $(x, f(x))$:
a est le quotient de $f(x)$ par x.
Quant à $f(x')$, c'est le produit de a par x'.

Procédure ④

Elle utilise la linéarité de f, plus particulièrement l'additivité de f :
Quels que soient les nombres u et v, $f(u + v) = f(u) + f(v)$.
Ainsi, dans l'exemple cité : $5 = 4 + 1$, donc $f(5) = f(4) + f(1)$.

Procédure ⑤

Elle utilise (sans la justifier) l'égalité suivante :
$x\,f(x') = x'\,f(x)$.
Il en résulte que $f(x')$ est le nombre qui, multiplié par x, donne $x'\,f(x)$, c'est-à-dire que $f(x')$ est le quotient de $x'\,f(x)$ par x.

L'étude s'achève par trois situations, l'une dans un cadre formel, les autres contextualisées par des grandeurs.

La situation 7 propose de vérifier à la calculatrice les effets de trois procédés différents de calculs d'un quotient (a x b) / c, (a/c) x b, et a x (b/c). Les élèves constatent à la calculatrice les variations de chiffres de la partie décimale. Aucun calcul approché n'est demandé.

La dernière situation met en scène deux fonctions numériques différentes :

- la relation entre longueur du côté d'un carré et périmètre de ce carré,
- la relation entre longueur du côté d'un carré et aire de ce carré.[66]

Le but est d'introduire le mot "proportionnel" après avoir rencontré un exemple de grandeurs qui ne sont pas proportionnelles, et d'exhiber le coefficient de proportionnalité. C'est encore la double-bande qui est suggérée. La dernière séance est consacrée à l'étude de situations où le multiplicateur est un quotient de décimaux et les nombres sur lesquels il opère sont décimaux.

5.4- Les caractéristiques des *Apprentissages mathématiques*

Comme les auteurs l'avaient annoncé, l'ouvrage se situe dans les limites des *programmes officiels.*

Ce qui justifie l'introduction des quotients de décimaux, c'est la résolution d'une équation multiplicative à coefficients décimaux, dans un cadre purement numérique, formel. Le quotient de décimaux est un multiplicateur, qui opérera sur des décimaux ; ce n'est pas une mesure de grandeurs. Le but est visiblement que les élèves sachent traiter des énoncés de quatrième proportionnelle par les quotients de décimaux.

L'*approximation* est présente dès l'introduction du quotient de décimaux, grâce à l'emploi de la calculatrice, mais sans lien avec l'ordre sur les décimaux.

Il y a un travail effectif sur les longueurs : à propos d'une situation d'agrandissement (le puzzle) et surtout dans la fabrication de nombreuses graduations régulières et doubles-bandes. C'est la seule *grandeur* effectivement mise en scène, les autres grandeurs étant seulement évoquées. Les *grandeurs familières* sont évoquées à propos de problèmes de recherche de quatrième proportionnelle.

Du point de vue des *registres sémiotiques* associés aux fractions et aux décimaux, une forme domine : la double-bande. Des représentations en tableau sont également présentes. La double-bande numérique sert d'outil organisateur d'informations : elle illustre la relation entre grandeurs et sert également de support à l'explicitation des procédures de calcul. Pour les situations de proportionnalité, elle est équivalente aux graphiques utilisés par Douady & Perrin. En revanche, cette représentation n'est pas exploitable pour des fonctions numériques autres que la proportionnalité (aire du carré en fonction de la longueur, par exemple).

La progression de l'ouvrage *Apprentissages mathématiques* est basée sur la fabrication de deux "objets", le quotient de décimaux et la double-bande. Les contextualisations interviennent après la fabrication de ces objets : le quotient de décimaux sert à résoudre des problèmes de quatrième proportionnelle et la double-bande permet d'organiser les informations.

---

66 P. 110.

La gestion du temps de la classe est le plus souvent basée sur la succession : recherche au moyen de travaux de groupe, mise en commun, élucidation de procédures, entraînement. Elle est donc très proche de celles que recommandent les auteurs des deux progressions de référence.

Si la résolution de problèmes est présente dans la progression d'*Apprentissages mathématiques,* la place de la décontextualisation et de la recontextualisation n'est pas celle des deux progressions de référence.

6- Comparaison des quatre ouvrages

Les ouvrages, *Atout Math, Diagonale* et *Cinq sur Cinq* sont parus à peu près à la même époque, l'ouvrage *Apprentissages mathématiques* est plus ancien (1991). Leurs auteurs ont des parcours professionnels voisins, ils connaissent les travaux de la didactique et très probablement les progressions de référence. Tous en font une reprise, mais chaque manuel illustre des reprises différentes.

6.1 - Comparaison avec les progressions de référence

Les ouvrages *Atout Math* et *Apprentissages mathématiques* sont ceux qui recommandent une pédagogie qui ressemble le plus à celle des ingénieries de la didactique des mathématiques. L'ouvrage *Atout math* s'inspire du jeu de cadre de Douady pour traiter de pair les questions géométriques et numériques. En revanche, le manuel *Diagonale* ne se situe pas dans la perspective de l'apprentissage par la résolution de problèmes. Apparemment, il s'organise autour d'une présentation de problèmes-types.

Nous avons déjà vu que les situations proposées dans *Atout math* et *Diagonale* avaient peu de points communs avec celles des progressions de référence, à part le fait d'avoir introduit les fractions avant les décimaux. Ce n'est pas le cas du livre *Apprentissages mathématiques,* qui propose quelques situations voisines de celles figurant dans les progressions de référence : l'agrandissement du puzzle, l'association d'un quotient de décimaux à une proportionnalité, la liaison entre décimaux et approximation. Toutefois, la position d'*Apprentissages mathématiques,* en matière de partage régulier des segments ou de graduation des demi-droites l'éloigne des progressions de référence. La double-bande est introduite comme objet avant de devenir outil : outil organisateur d'informations, puis outil de traitement d'informations.

Le manuel *Cinq sur cinq* reprend la situation de commensuration, les schémas avec flèches, les graphiques, mais l'exploitation de ces outils ne va pas aussi loin que dans les progressions de référence. Les propriétés formelles prennent beaucoup de place dans la partie cours et les recontextualisations n'apparaissent que dans les exercices et problèmes de fin de chapitres.

Reprenons la même grille que celle utilisée pour les progressions de référence.

	Atout Math CM1	Diagonale CM1
Introduction par des problèmes	Oui	Non
Grandeurs effectives	Non	Aires, longueurs
Rationnels introduits comme mesures	Indirectement, par graduation d'une demi-droite	Partage de l'unité (aire) Commensuration (longueur)
Rapport partie/tout	Non	Oui
Liaison entre addition de décimaux comparaison	Sur la demi-droite	Sur la demi-droite
Liaison entre division par un entier et multiplication par un rationnel	Non	Non
Registres sémiotiques	Demi-droite numérique Tableau de proportionnalité Double-bande	Demi-droite numérique Tableau décimal
Décimaux comme solution approchée	Non	Non
Différence entre calculer une mesure et mesurer une grandeur	Non	Non
Calculatrice et décimaux	Non	Non

	Cinq sur cinq	Apprentissages mathém.
Introduction par des problèmes	Oui	Oui
Grandeurs effectives	Non	Longueurs
Rationnels introduits comme mesures	Commensuration	Non
Rapport partie/tout	Non	Oui
Liaison entre addition de décimaux et comparaison	Non	Non
Liaison entre division par un entier et multiplication par un rationnel	Non	Non
Registres sémiotiques	Schémas avec flèches Égalités de fractions Graphiques	Doubles-bandes Tableaux de proportionnalité
Décimaux comme solution approchée	Non	Oui
Différence entre calculer une mesure et mesurer une grandeur	Non	Non
Calculatrice et décimaux	Non	Oui

La reprise des travaux de didactique existe donc, mais elle est partielle. Les auteurs (et probablement leurs éditeurs) ont tous choisi une position de compromis, comme si, en matière d'enseignement de décimaux, les innovations ne pouvaient être que modérées.

6.2 - Une certaine plasticité des milieux primaires et secondaires ?

L'examen des quatre ouvrages montre l'existence de solutions variées pour l'enseignement des nombres décimaux. Il y a donc une certaine plasticité du milieu de l'édition scolaire[67]. Nous situant à la fois par rapport aux progressions de référence et aux textes officiels, nous pouvons maintenant illustrer quelques ouvertures apportées par les auteurs des manuels, en cumulant les innovations apportées par les quatre ouvrages.

- Les rationnels précèdent les décimaux (*Atout Math, Diagonale*). Ils désignent des mesures d'aires (*Diagonale*) ou de longueurs (*Atout Math, Diagonale*) ou des opérateurs de proportionnalité (*Diagonale, Apprentissages mathématiques*).
- Sur la demi-droite numérique, les nombres représentent à la fois des positions et des longueurs (*Diagonale*).
- Les rationnels comme opérateurs de proportionnalité sont représentés par des schémas avec flèches (*Cinq sur Cinq*) ou des tableaux (*Atout Math, Apprentissages mathématiques*).
- La calculatrice est utilisée pour évaluer des quotients de décimaux (*Apprentissages mathématiques*).
- Les décimaux sont associés à un problème d'approximation (*Apprentissages mathématiques*).

En ce qui concerne les textes officiels en vigueur à l'époque où ces ouvrages ont paru, les auteurs ont pris quelques libertés.

- L'étude des rationnels déborde celle des "fractions simples" (*Diagonale*).
- Le repérage des abscisses de points régulièrement espacés sur la demi-droite numérique suppose plus de compétences que le placement de nombres sur la demi-droite numérique (*Atout Math*).
- La "double-bande" n'est pas citée dans les textes officiels de sixième (*Apprentissages mathématiques*).

Nous pouvons en déduire qu'une partie du milieu enseignant accepte des variantes dans l'enseignement des décimaux. Serait-il prêt à reprendre, au moins en partie, les ingénieries conçues par Brousseau & Brousseau, Douady & Perrin ? *Probablement pas sur n'importe quel thème*, puisque déjà certains d'entre eux ne sont pas repris dans les manuels étudiés. C'est le cas de la liaison entre approximation et mesures d'écarts. En effet, l'approximation y est associée à l'à peu près et non à l'emboîtement d'intervalles de plus en plus petits. Déjà, aucun des manuels n'établit de liaison entre l'ordre des décimaux, l'addition et la mesure d'écarts entre décimaux. On ne trouve pas non plus dans ces manuels l'étude des rapports entre mesure de grandeurs, calcul et approximation, même pour les longueurs. Cela ne nous semble pas fortuit.

Y a-t-il des thèmes faciles à introduire, d'autres plus difficiles ou hors sujet ? C'est ce que nous allons vérifier maintenant en présentant à des enseignants volontaires des scénarios pédagogiques conçus autour des caractéristiques que nous venons de dégager.

67 Pas forcément représentatif du milieu des enseignants : en effet, nous ne disposons pas des chiffres des ventes.

Chapitre V

LES SUGGESTIONS

L'étude des manuels nous a permis de mettre à jour les similitudes et les différences qu'ils présentent avec les progressions de référence (Brousseau & Brousseau, Douady & Perrin). Le milieu de l'édition, reflet de courants parmi les pratiques pédagogiques, est ouvert à des propositions pédagogiques. Il est donc raisonnable de penser que des enseignants pourraient être intéressés par certaines situations des progressions de référence et qu'ils seraient prêts à les insérer dans leur plan de cours.

Nous avons déjà signalé plusieurs adaptations de la situation de l'agrandissement du puzzle. Les adaptations font donc partie des pratiques du milieu enseignant, au moins celui qui est proche de la recherche en didactique. Notre propos est d'étudier quels thèmes se prêteraient le plus facilement à de telles adaptations.

Quelles situations extraire des progressions de référence ? Sous quelle forme les présenter ? Comment recueillir les informations sur leur éventuelle utilisation ? C'est ce que nous allons présenter ci-après.

1- Les choix

1.1- Faire adapter et non faire reproduire

Nous ne cherchons pas à vérifier que les progressions de référence sont reproductibles dans des conditions ordinaires de fonctionnement scolaire. Au contraire, nous avons fait l'hypothèse que les enseignants dans leur majorité ne changent pas massivement leurs plans de cours d'une année sur l'autre, mais procèdent plutôt par petites touches. En conséquence, si des enseignants reprennent à leur compte des éléments issus des progressions de référence, les changements par rapport à leurs pratiques ordinaires sont le plus souvent limités à quelques situations : ils font alors une adaptation du texte initial de référence. Nous dirons dans ce cas qu'ils se sont *réapproprié* une partie du texte.

Nous ne cherchons pas à comparer les effets des deux progressions. En effet, nous considérons que les élèves peuvent tirer profit de la résolution de problèmes issus de l'une et l'autre des progressions de référence. D'où l'idée de proposer à des enseignants volontaires quelques situations extraites des progressions de référence, ainsi que d'autres rédigées par nous, qui s'articulent autour de points marquants que nous avons dégagés de la comparaison des manuels : mesure effective de grandeurs, mesure d'écarts, différence entre calculer une mesure et la mesurer, approximations comme outils, rationnels-mesures, rationnels-fonctions, calculatrice.

Nous mettons en œuvre ainsi une double adaptation.

En sélectionnant parmi les situations des progressions de référence celles qui nous paraissent les plus marquantes pour l'apprentissage des décimaux, nous avons modifié les textes initiaux. Nous avons isolé certains problèmes sans tenir compte de leur place dans la progression dont ils sont extraits. Nous avons contracté considérablement la présentation des situations, pour laisser au lecteur la liberté de "broder" dans un sens qui corresponde à ses pratiques ordinaires. Nous pouvons dire que nous nous sommes réapproprié les textes de référence.

Pour contrôler cette adaptation, nous décrirons tout d'abord les écarts entre les situations décrites dans les progressions de référence et celles que nous soumettons aux enseignants volontaires. Ensuite, nous montrerons que les "suggestions", quelle que soit leur origine, reprennent sous des formes diverses les points marquants cités plus haut. Enfin, nous établirons une analyse a priori des réemplois de ces suggestions en nous référant aux textes officiels et aux évaluations de la direction de l'évaluation et de la prospective du Ministère de l'éducation nationale.

En laissant le choix à des enseignants de reprendre à leur compte les situations proposées en totalité ou en partie, ou de les laisser de côté, en leur fournissant une esquisse et non un plan de leçon "clé en main", nous les conduisons à adapter les situations décrites dans les suggestions que nous avons élaborées. Nous dirons qu'ils se sont réapproprié les textes que nous avons rédigés. Notre étude consiste donc à examiner le contenu de cette réappropriation.

1.2- Proposer un matériel écrit, sans formation associée

Nous avons choisi de remettre les textes des suggestions individuellement à chacun des enseignants : nous ne leur avons pas fait cours, nous n'avons pas constitué de groupe de recherche sur l'enseignement des décimaux où ils auraient pu nous interroger ou élaborer des propositions. Nous avons voulu nous placer *dans des conditions proches de reprises spontanées.*

Toutes les suggestions sont rédigées de la même manière : présentation en un recto ou un recto-verso, introduction, indication de mise en scène, consignes, signifiants associés, bilans partiels, bilans terminaux, variantes. Le texte de chaque suggestion est volontairement court, il ressemble plutôt à une esquisse qu'à un scénario pédagogique complet. En effet, nous voulions que les enseignants se sentent libres de "broder".

Nous avons proposé un nombre limité de suggestions (douze), pour faciliter les choix des enseignants. En effet, nous ne voulions pas que les enseignants associés à l'expérimentation aient un surcroît de travail décourageant. Cependant, nous avons intégré un nombre significatif de thèmes que nous avions repérés dans les études préliminaires (programmes officiels, progressions de référence, manuels). Chaque suggestion est présentée dans un texte dense, qui réclame de la part du lecteur un travail intellectuel, surtout si le thème abordé ne lui est pas familier.

Pour les enseignants, la lecture des "suggestions" s'apparente à celle qu'ils feraient d'articles de revues pédagogiques. Il nous faut donc tenir compte de l'aspect "texte" des produits que nous leur remettons. Pour ce faire, nous retiendrons les deux axes d'analyse de Duval [1] (1991) sur la compréhension de textes, les connaissances du lecteur et le type de rédaction.

[1] DUVAL, R. (1991), Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des textes, *Annales de didactique et de sciences cognitives, vol. 4.*

- Le lecteur peut être familier du domaine considéré : la lecture est alors très facile ou facile selon le type de rédaction. La rédaction peut être totalement explicite pour un expert du domaine (lecture très facile) ou nécessiter une réorganisation des informations ou la reconstitution de certaines d'entre elles (lecture facile).
- Le lecteur n'est pas familier du domaine considéré : la lecture est alors difficile ou très difficile selon le type de rédaction. Même pour une rédaction explicite, le manque de familiarité avec les concepts en jeu dans le texte peut être un obstacle à la compréhension.

Les rejets peuvent être dûs, même pour des lecteurs familiers du domaine considéré, à l'effort de reconstitution d'informations insuffisamment explicites dans la feuille remise.

Nous avons choisi de rencontrer chaque enseignant pour lui présenter les douze feuilles. Nous en avons montré les textes et donné les titres sans en commenter les contenus. Nous avons insisté sur la liberté que les enseignants avaient de ne rien reprendre dans leurs cours. Nous leur avons annoncé les tests de début et de fin d'année ainsi que les entretiens en cours et en fin d'année. Nous leur avons laissé une note écrite résumant l'information donnée oralement (voir annexe).

De manière intentionnelle, les suggestions ne comportent aucune indication de niveaux, et ce pour deux raisons.

Dans un premier lieu, nous souhaitions laisser le choix aux enseignants de la place des situations dans leur progression, avec le risque que les enseignants soient rebutés par le travail de lecture que cela leur imposait. La sélection des activités dépend du type de pédagogie pratiqué par l'enseignant. Si l'enseignant a l'habitude de fournir des exemples-types avant de faire des exercices d'application, les suggestions peuvent encourager à utiliser des exemples comme occasions de renforcement. Si l'enseignant préfère introduire les notions par des problèmes, il peut prendre pour support introductif l'une ou l'autre des situations proposées. Quelle que soit sa pédagogie, il est exclu qu'il puisse utiliser toutes les suggestions. Les choix sont donc obligatoires.

Dans un second lieu, nous savions que certaines situations proposées ne ressemblaient à aucune des situations rencontrées dans les manuels. Nous n'avons pas voulu proposer de point d'ancrage par rapport aux programmes officiels, espérant que les enseignants eux-mêmes examineraient la compatibilité de ces situations avec les contraintes de leur enseignement.

1.3- Homogénéiser et contraster

Nous avons choisi de présenter des suggestions sous une forme qui ne permettait pas d'en distinguer l'origine : Brousseau & Brousseau ou Douady & Perrin. Nous avons vu, au chapitre III, que les documents publiés par les deux équipes étaient différents du point de vue de la présentation textuelle. Notre présentation textuelle n'est assimilable ni à l'une ni à l'autre.

Nous avons choisi de fournir également des textes tirés d'autres sources que celles de Brousseau & Brousseau et Douady & Perrin et ce, pour plusieurs raisons. Nous voulions avoir un effet de contraste avec les progressions de référence, sur certains thèmes comme l'emploi de la calculatrice ou les grandeurs familières ou les grandeurs physiques. Nous voulions aussi présenter des situations faciles à utiliser dès le CM1, beaucoup plus courtes que celles issues des progressions de référence, de façon à favoriser un emploi, même très réduit, du matériel remis.

L'élaboration des textes s'est faite en deux temps : pré-expérimentation de sept fiches en 1993-94, expérimentation en 1994-95.

Nous disposons ainsi d'instruments nous facilitant le repérage des choix faits par les enseignants, des exercices qu'ils ont retenus, des variantes qu'ils y ont apportées.

Rappelons que nous avons choisi de ne pas aller dans les classes : nous avons préféré recueillir les avis des enseignants par entretien, au fur et à mesure du déroulement de l'année. Le but poursuivi est de connaître les raisons qui ont poussé les enseignants à adopter (en totalité ou en partie) les suggestions que nous leur avons remises, également de repérer la place de ces extraits dans leur progression. Notre perspective est d'avoir accès aux problèmes d'enseignement qu'ils souhaitaient résoudre, à ce qu'ils considèrent comme une "bonne manière d'enseigner les décimaux".

Nous avons choisi de contraster *deux populations* d'enseignants : un groupe d'enseignants de CM1 et CM2 d'une part, un groupe d'enseignants de sixième et cinquième d'autre part. En effet, les progressions de référence ayant été testées principalement en école élémentaire, nous souhaitions examiner si les suggestions inspirées des progression de référence étaient plus conformes aux coutumes de l'enseignement primaire qu'à celles du secondaire[2].

Lors des entretiens avec les enseignants, nous n'ignorons pas les risques de décalage entre le dire et le faire. Aussi avons-nous prévu de demander des informations complémentaires : deux classeurs d'élèves et l'ensemble des textes d'évaluations écrites faites avec les élèves. Nous pouvons ainsi y trouver la confirmation des exercices, leur date.

1.4- Limiter les biais à propos des populations concernées : enseignants et élèves

Nous aurions souhaité vérifier comment des enseignants ordinaires utilisent des suggestions pédagogiques inspirées des travaux didactiques avec des élèves de classes ordinaires. Les conditions de choix de la population expérimentale ne garantissent pas ce caractère ordinaire.

Tout d'abord, nous avons fait appel à nos relations professionnelles pour rechercher des enseignants qui accepteraient d'être associés à l'expérimentation. Leur acceptation volontaire, leur souci d'améliorer l'enseignement des décimaux, leur attente positive par rapport à l'expérimentation, autant de facteurs qui contredisent le caractère ordinaire de l'échantillon : on peut s'attendre à ce que leurs appréciations soient plus favorables qu'une population d'enseignants "tout venant". Par ailleurs, la taille de l'échantillon retenu (au démarrage 19 enseignants d'école élémentaire et 13 enseignants de collège) nous oriente vers un travail qualitatif et non statistique.

Nous décrirons notre échantillon en utilisant certains des critères retenus par la direction de l'évaluation et de la prospective (DEP) du ministère de l'éducation nationale pour mesurer l'efficacité pédagogique d'instituteurs [3].

Pas plus que leurs enseignants, les élèves ne sont "ordinaires". Pour en prendre la mesure, nous avons fait passer au début et à la fin de l'année 1994-95 un même test [4] bâti à partir du test national

[2] Nous avons déjà vu au chapitre II la différence de points de vue qu'adoptent les textes officiels sur les décimaux à l'école primaire et aux deux premières années du collège.

[3] Direction de l'évaluation et de la prospective (1994), Les effets de la formation initiale et de l'expérience professionnelle des instituteurs,*brochure DEP n° 36*, Paris: Ministère de l'éducation nationale, Dossiers d'Éducation et Formations.

[4] Nous avons fait de légères modifications au test de fin d'année.

de la direction de l'évaluation et de la prospective pour la classe de sixième (septembre 1994). L'opinion qu'un enseignant exprime sur la faisabilité d'un exercice peut, en effet, être fortement influencée par le niveau moyen de la classe avec laquelle il travaille.

Nous présenterons la population des enseignants et des élèves au chapitre VI.

Nous allons présenter maintenant les feuilles remises aux enseignants, dans l'ordre où elles leur ont été remises. Pour chacune d'elles, nous indiquerons la source d'inspiration et les modifications que nous avons faites par rapport aux textes originaux de Brousseau & Brousseau (B & B) et Douady & Perrin (D & P). Nous fournirons ensuite une analyse a priori des utilisations compatibles avec les instructions officielles en vigueur dans les niveaux de classe considérés. Nous comparerons enfin le contenu des suggestions avec les exercices proposés dans les évaluations de la direction de l'évaluation et de la prospective du ministère de l'éducation nationale.

2. Description des suggestions

2.1- Suggestion 1 : Le calcul approché sur les entiers et les décimaux

Cette feuille (recto-verso, présentée ci-après) est sans lien avec les progressions de référence. Elle comporte plusieurs exercices indépendants, dont certains sont faisables dès le début du cours moyen. Ceci évite de mettre les enseignants associés à l'expérimentation en situation de non-réponse : avec quelques exercices très courts, nous leur donnions la possibilité de s'engager très peu dans l'expérimentation, tout en respectant le contrat qu'ils avaient passé avec nous.

Les nombres sont entiers ou décimaux. Après une révision des propriétés des multiples de 10, 100, 1000 etc., trois exercices formels proposent aux élèves de situer un nombre par rapport à d'autres en calculant ou estimant des écarts (avec représentation sur une demi-droite). Le dernier exercice propose sur un ensemble fini de nombres d'examiner la compatibilité de l'ordre et des opérations arithmétiques.

2.2- Suggestion 2 : Les grandeurs familières - Interprétation de résultats affichés à la calculatrice

Cette feuille (recto-verso, présentée ci-après) est sans lien avec les progressions de référence.

Nous présentons ici des activités où la calculatrice joue un rôle important. Les grandeurs sont évoquées : longueurs, masses, prix.

Une première partie se borne à des calculs additifs (y compris addition répétée) avec mélange d'unités familières et calcul d'écarts. La mise en scène proposée met en concurrence le calcul à la main et la calculatrice (zéros supprimés dans la partie décimale). En sus de la gestion des unités familières, nous donnons l'occasion de comparer les écritures socialisées de la partie décimale avec celles fournies pas la calculatrice. Nous disposons ainsi d'un moyen de tester la part prise par les enseignants dans l'entraînement à l'emploi des outils de calcul enseignés à l'école dans des contextes non scolaires.

Dans la deuxième partie, nous proposons une situation de la vie courante liée aux approximations à 5 centièmes près. Notre intention est d'examiner si les enseignants sont prêts à faire de la notion d'approximation un outil pour résoudre un problème (et non seulement un objet) dans un contexte qui montre les usages sociaux des mathématiques.

Jeanne BOLON
IUFM, centre de Versailles

Mars 1994

Suggestion 1 : Le calcul approché sur les entiers et décimaux

Présentation
Le calcul approché est utile dans de maintes occasions : il permet de prévoir l'ordre de grandeur d'un calcul, de contrôler d'éventuelles fausses manœuvres avec une calculatrice. Il donne l'occasion de mettre en place des procédés dont les fondements pourront être explicités algébriquement le moment venu.

En calcul mental ou rapide écrit

* 253 + 10	253 + 100	253 + 1000 etc.
* 4253 - 10	4253 - 100	4253 - 1000 etc.
* 253 + 20	253 + 200	253 + 2000 etc.
* 4253 - 20	4253 - 200	4253 - 2000 etc.
* 26 x 10	26 x 100	26 x 1000 etc.
* 26 x 20	26 x 200	26 x 2000 etc.

* quotient entier de
4978 par 10   4978 par 100   4978 par 1000 etc
4978 par 20   4978 par 200   4978 par 2000 etc.

Questions analogues avec des décimaux en calcul rapide écrit :

* 0,053 + 0,1	0,053 + 0,01
* 9,053 + 0,2	9,053 + 0,02
* 3,053 - 0,1	3,053 - 0,01 etc.

* Idem avec multiplication et division par des puissances de dix.

Quel est le nombre le plus proche du résultat exact ?
L'enseignant dévoile au tableau une liste de nombres, par exemple :
234   5002   4038   512   84
Puis il écrit au tableau 38 x 109.
Les élèves doivent écrire sur l'ardoise le nombre de la liste qu'ils estiment le plus proche d'un nombre fixé à l'avance, par exemple 38 x 109.

Pour corriger, un élève, désigné à l'avance, utilise une calculatrice pour calculer l'écart entre 38 x 109 et les nombres choisis par les élèves.
Idem avec une somme de plusieurs nombres entiers, une différence de nombres, le quotient entier d'un nombre par un autre.

Idem avec des nombres décimaux.

<u>Variante</u>
Consigne : *dans chaque cas, choisis parmi les nombres de la liste celui qui est le plus proche du résultat exact.*
Tu n'auras pas le temps de poser les opérations.

32,91 x 2,403 → 60 / 5000 / 34

45,92 x 0,2 → 90 / 10 / 30

12,7 + 10,005 + 49,5 → 10000 / 70 / 300

103,95 : 205 → 0,5 / 0,1 / 2

203,9 : 51,8 → 0,4 / 0,2 / 4

La correction se fait de la même manière.

Situer sur une graduation
On représente sur une demi-droite numérique les multiples de 50 :
0,   50,   100,   150,   200,   etc.

On peut décrire ces nombres comme les "nombres de 50 en 50 à partir de 0" ou "les multiples de 50".

Chaque fois que l'enseignant donne un nombre "au hasard", les élèves doivent dire
- quels sont les nombres de la graduation les plus proches,
- de quel "côté" se trouve le nombre dit par l'enseignant, plus près du plus petit ou plus près du plus grand ? à quelle distance est-il du plus petit ? du plus grand ?

Par exemple, 328 est plus grand que 300 et plus petit que 350 ; il est plus près de 350 (distance 22). (Un élève vérifie avec une calculatrice).

Les graduations à privilégier sont celles liées à la base de numération : 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250, 500 etc.

Tu chauffes, tu brûles, tu gèles
Les élèves doivent deviner un nombre entier choisi par l'enseignant entre 100 et 200. Ils proposent un nombre, et l'enseignant répond :
- tu gèles, si l'écart entre le nombre proposé et son nombre est supérieur ou égal à 10,
- tu chauffes, s'il est supérieur ou égal à 5 et plus petit que 10,
- tu brûles, s'il est plus petit que 5.
Dès qu'un élève obtient la réponse "tu brûles", le jeu s'arrête. Chaque élève note un nombre possible. Celui qui a écrit le nombre le plus proche de celui choisi par l'enseignant a gagné. Contrôle avec la calculatrice.

Variantes
- Un élève joue le rôle de l'enseignant (cela fait aussi calculer !).
- On change l'intervalle de départ.
- On change les intervalles liés aux réponses "tu gèles", "tu chauffes", etc., en privilégiant les nombres liés à la base de numération : 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250, 500 etc.
- Le nombre choisi peut être décimal entre 10 et 20 et les intervalles liés aux réponses "tu gèles", "tu chauffes", "tu brûles", sont les nombres 1, 0,5 et 0,1 ; ou 0,5, 0,1, 0,01

Le vrai et le faux
Des cartes de deux couleurs, genre cartes à jouer, sont présentées aux élèves.
Sur les cartes bleues, sont inscrits le nombres :
2 0,5 0,1 10 30 400
Sur les cartes rouges, sont inscrits le nombres :
3 0,2 1,5 20 50

Dans un *premier temps*, l'enseignant fait calculer mentalement des sommes et des produits. Les cartes sont retournées, nombres contre la table. L'enseignant annonce une opération (addition ou multiplication) et tire une carte bleue et une carte rouge. Il affiche les nombres : les élèves doivent écrire le résultat demandé. Seuls quelques sommes ou produits sont demandés, pour que la suite conserve un enjeu.

Dans un *deuxième temps*, l'enseignant affiche au tableau les 6 valeurs bleues et les 5 valeurs rouges. Il tire ensuite une carte bleue et une carte rouge sans les montrer aux élèves et annonce une phrase du genre :
"La somme des deux cartes est plus petite que 500" ou "Le produit des deux cartes est plus grand que 3". Les élèves doivent dire si c'est vrai ou faux ou si on ne peut pas savoir. Ils doivent également fournir des arguments à l'appui de leur affirmation.

Dans un *troisième temps*, l'enseignant fait calculer quelques quotients, carte bleue divisée par carte rouge. Les cartes sont retournées, nombres contre la table. L'enseignant tire une carte bleue et une carte rouge. Il affiche les nombres : les élèves doivent écrire le résultat demandé en respectant l'ordre, bleu divisé par rouge. Seuls quelques quotients sont demandés, pour que la suite conserve un enjeu.

Dans un *quatrième temps*, l'enseignant affiche au tableau les valeurs bleues et rouges. Il tire ensuite une carte bleue et une carte rouge sans les montrer aux élèves et annonce une phrase du genre :
"Le quotient de la carte bleue par la carte rouge est plus petit que 1000" ou "Le quotient de la carte bleue par la carte rouge est plus grand que 0,01". Les élèves doivent dire si c'est vrai ou faux ou si on ne peut pas savoir. Ils doivent également fournir des arguments à l'appui de leur affirmation.

Contrôle : le nombre de cas différents est trop élevé pour que chaque élève fasse l'ensemble des calculs possibles à la main. Mais le contrôle est faisable en se répartissant les calculs dans la classe ou en recourant à une calculatrice.

Variantes
-Nombres entiers pour les cartes bleues et rouges.
- Nombres décimaux avec un chiffre et d'autres avec deux chiffres après la virgule.
- Fractions de numérateur 1 : 1/5, 1/2, 1/10, 1/50
- Cartes bleues : la valeur maximum et la valeur minimum sont des entiers consécutifs ; idem avec cartes rouges.

Bilan
La somme et le produit, cela va dans le même sens (les nombres sont positifs, ici). Le plus petit nombre possible est la somme des plus petits nombres. Le plus petit produit est le produit des plus petits nombres.

Ce n'est pas vrai pour le quotient. Le plus grand quotient est 400/0,2 c'est-à-dire 2000. Le plus petit quotient est 0,1/50, c'est-à-dire 0,002

Jeanne BOLON
IUFM, centre de Versailles

Avril 1994

Suggestion 2 : Les grandeurs familières -
Interprétation des résultats affichés à la calculatrice

Présentation
Sur les grandeurs familières, longueurs, prix, masses, capacités, il n'est pas nécessaire de connaître les propriétés des décimaux pour faire des calculs additifs à la main. On "convertit" les centimes en francs,ou les centimètres en mètres, dès que la somme dépasse 100 ; on fait de même pour des kilomètres et mètres, pour des kilogrammes et grammes.

Les nombres décimaux utilisés socialement ont un nombre fixe de chiffres après la virgule : 2 pour les francs, 3 pour les kilomètres ou les kilogrammes, etc. Les élèves sont habitués à une vision additive de ces décimaux :
3,50 F, c'est 3 F + 50 centimes.
1,750 kg, c'est 1 kg + 750 g.
Ils en induisent (abusivement) :
142,5 F, c'est 142 F + 5 centimes,
3,58 kg, c'est 3 kg + 58 g.

La calculatrice éliminant les "zéros inutiles", il y a un travail d'interprétation à faire des résultats qu'elle affiche, lorsque le contexte évoqué est ceui d'une grandeur familière.
Le scénario ci-après a pour but de mettre en contradiction les réponses des élèves, en vue d'une clarification.

Plusieurs grandeurs familières sont évoquées dans cette fiche, d'une part pour varier les contextes, d'autre part pour que les décimaux n'aient pas toujours le même nombre de chiffres après la virgule.

Partie 1- Calculs additifs

Dispositif
Les enfants sont par groupe de deux.

L'enseignant annonce : *"Chaque groupe aura des énoncés à résoudre, mais vous ne calculerez pas tous de la même manière. Vous (groupes désignés), vous devrez faire les calculs à la main, je veux pouvoir vérifier. Vous (groupes désignés), vous aurez une calculatrice pour deux et vous devrez trouver le résultat exact. Après, nous comparerons les résultats."*

Aux groupes qui calculent à la main, l'enseignant remet deux énoncés : l'un avec des nombres décimaux à 2 chiffres après la virgule, l'autre avec 3 chiffres après la virgule.
Aux groupes qui calculent avec une calculatrice, il remet quatre énoncés, car c'est plus rapide.

Pour la correction, l'enseignant affiche chaque énoncé. Les groupes affectés au calcul à la main annoncent leurs résultats, puis ceux du calcul à la calculatrice. Discussion en cas de désaccord. Où s'est-on trompé ?

Longueurs-1
J'ai plusieurs paquets à faire. Il me faut de la ficelle pour les fermer. On m'a dit les longueurs qu'il fallait pour chacun des paquets :
- 80 cm pour le premier,
- 50 cm pour le deuxième,
- 1,20 m pour le troisième,
- 70 cm pour le dernier.

J'ai une bobine de ficelle de 3,50m. Vais-je manquer de ficelle ou en aurai-je trop ? Indique-moi ce qui me restera ou ce qui me manquera.

Longueurs-2
Une course cycliste est en préparation. Les organisateurs voudraient que le circuit fasse au moins 9 km. Il comporte :
- un départ sur une route assez plate (2,750 km),
- une côte de difficulté moyenne (1,450 km),
- une courte descente rapide (900 m),
- un plat (1,050 km)
- un retour vers le point de départ en légère montée (2,050 km).

Le parcours est-il assez long ? trop long ? S'il dépasse les 9 km, indique de combien. S'il n'est pas assez long, indique ce qui manque.

Prix
Je suis allée au super-marché. J'ai acheté beaucoup de choses, et j'ai peur de ne pas avoir assez d'argent pour payer. J'ai juste 50 F. J'ai pris :
- des yaourts à 12,50 F,
- un camembert à 7,20 F,
- 2 boîtes d'oeufs à 6,10 F l'une,
- 1 kg de farine à 5,10 F,
- 1 kg de sucre à 8 F,
- des pommes pour 9,20 F.

Est-ce que j'aurai assez d'argent ? Si oui, calcule la monnaie qu'on me rendra. Sinon, calcule combien il me manquera d'argent.

Masses
Je suis allée au marché et j'ai trouvé mon panier très lourd à porter. Le médecin m'a dit qu'il ne fallait pas dépasser 8 kg, sinon cela me ferait mal au dos. En déballant ce que j'ai acheté, j'ai trouvé :
- 2 kg de sucre,
- 4 paquets de 500 g de nouilles,
- 1 kg de farine,
- 1 camembert de 250 g,
- 3,500 kg de lessive,
- 4 yaourts (125 g chacun),
- 700 g de pommes.

Est-ce que cela dépassait les 8 kg permis ? Si oui, indique de combien cela dépasse. Sinon, calcule ce que je peux encore mettre dans mon panier.

D'autres exemples sont à traiter. Les nombres doivent être choisis pour que la calculatrice supprime des zéros dans l'écriture du nombre décimal sous sa forme sociale.

Partie 2- Calculs multiplicatifs "exacts" et "arrondis"
Il est fastidieux de faire à la main des calculs multiplicatifs sur des nombres décimaux. La calculatrice est alors d'un grand secours, le calcul à la main servant à contrôler l'ordre de grandeur du résultat affiché.

Les calculs multiplicatifs de la vie quotidienne sont fréquemment l'objet d'arrondis. Par exemple, les prix sont arrondis à 5 centimes près.

Masses et prix au kilogramme
Les balances des marchés fournissent des calculs arrondis qui ne sont pas toujours ceux qu'auraient affichés les calculatrices. Comment sont fait les arrondis ? Quel est l'écart entre le "vrai" nombre et ce qui est demandé au client ?

Chez le marchands de fruits et légumes

Carotte		
1,305 kg	5,80 F/kg	7,55 F
Tomate		
1,035 kg	11,80 F/kg	12,20 F
Clémentines		
1,285 kg	15,80 F/kg	20,30 F
Potiron		
0,620 kg	7,00 F/kg	4,35 F
Céleri-branche		
0,690 kg	7,80 F/kg	5,40 F
Total		49,80 F

Chez le poissonnier

Maquereau		
0,550 kg	29,90 F/kg	16,45 F
Lieu		
0,585 kg	59,90 F/kg	35,05 F
Total		51,50 F

Procédures attendues
- Repérage du nombre de chiffres après la virgule du "vrai" nombre.
- Calcul de l'écart entre le vrai nombre et le prix demandé au client.
- Estimation de cet écart au centime le plus proche.
- Représentation sur une droite numérique des "vrais" nombres et des prix associés, puis de leurs écarts.

Bilan
Les prix sont calculés à partir des "vrais" nombres en recherchant le prix en centimes multiple de 5 le plus proche. On dit que le calcul du prix est fait *à 5 centimes près.*
Ce n'est pas la même chose de faire l'arrondi *au centime près* et *à 5 centimes près.*
Illustration avec la demi-droite numérique.

Maquette
On veut faire la maquette de la salle de classe. On décide de représenter 1 mètre dans la salle de classe par 2 cm sur la maquette. Consigne : *Avant de fabriquer la maquette, on se demande quelles seront les dimensions du tableau, de la porte, d'une table d'écolier, d'une feuille de papier 21x29,7. Sur la maquette, on prendra des mesures à 1 mm près.*

Ce problème n'est faisable que si chaque élève a fabriqué effectivement une maquette dans son cursus scolaire, pour que la correspondance entre dimensions réelles et dimensions sur la maquette ait du sens, et que l'élève puisse se centrer sur la différence entre "vrai" nombre et nombre pris pour mesure.

Procédures attendues
- Tableau de correspondance entre dimensions dans la réalité et "vrai" nombre de la maquette, rempli par procédés scalaires,
- Tableau de correspondance établi en utilisant la division de 1 m par 50.
- Tableau de correspondance établi en utilisant la multiplication par 2 (les unités étant inscrites à part).
- Correspondance établie sous forme graphique.
- Troncature au lieu d'arrondi pour les mesures de la maquette (procédure erronée).

La troisième partie est un exercice de réduction à l'échelle pour une échelle "facile", avec prise en compte des arrondis nécessaires à la fabrication des objets. Notre propos se limite à disposer d'indices sur la place des grandeurs effectives dans l'enseignement mathématique.

2.3- Suggestion 3 : Les grandeurs et les unités de référence. Fractionnement de l'unité - graduation

Cette suggestion (recto-verso, présentée ci-après) est une adaptation de deux extraits de la brochure D & P : chapitre I, *Mesure des longueurs- Recours aux fractions* (p. 29 à 39), Chapitre II, *Utilisation des fractions pour coder des aires* (p. 51 à 62). Nous avons estimé que la situation de fractionnement de l'unité (D &P) était plus facile que celle de commensurabilité (B & B) pour introduire la notion de fraction ou réinvestir la notion de fraction.

La suggestion aborde le fractionnement de l'unité de longueur (fractions de type 1/n), le fractionnement de l'unité d'aire et situation par rapport aux entiers et le double statut des nombres sur la droite numérique (position et longueur).

Nous avons fait plusieurs modifications par rapport aux textes originaux, modifications que nous présentons ci-après.

La brochure D & P présente tout d'abord une étude a priori de la situation de mesure de longueurs, selon le choix de l'unité-étalon. Puis la première séquence est décrite de la page 29 à la page 38 : il s'agit d'un jeu de message pour faire reproduire un segment sans dessin. La tâche est ensuite analysée, les différentes procédures à la portée des enfants sont présentées et les premières écritures sont dégagées de la comparaison des messages.

Dans notre rédaction, nous avons résumé les 10 pages correspondantes en l'équivalent d'une colonne :
- nous avons fourni le dispositif décrit par M.J. Perrin dans sa thèse (p. 188),
- nous avons légèrement modifié la consigne de la brochure D & P,
- nous avons résumé les procédures attendues,
- nous avons donné de nombreuses écritures additives et multiplicatives sans mention de l'unité et introduit, sur un exemple, la convention de l'écriture p/q par p fois 1/q.

Consigne de la brochure D & P :

> *Vous dessinez un trait. Votre récepteur doit reproduire un trait de même longueur. Pour cela, vous allez lui donner, sans vous servir de votre règle graduée, l'information nécessaire. Vous lui envoyez cette information dans un message écrit sans dessin. Si le récepteur a besoin d'informations supplémentaires, il les demande par écrit sur le message. Ensuite émetteur et récepteur comparent leurs traits pour voir s'ils ont bien la même longueur.*

Notre consigne :

> Chaque élève trace sur une feuille un segment qui ne touche pas les bords de la feuille. *Consigne : Chacun devra mesurer la longueur du segment sans utiliser son double-décimètre, seulement à l'aide de la bande de papier de couleur. La mesure qu'il aura trouvée sera donnée à un autre élève qui tracera un segment de cette longueur. On comparera par superposition des feuilles en regardant par transparence devant la fenêtre.*

Jeanne BOLON
IUFM, centre de Versailles

Avril 1994

Suggestion 3 : Les grandeurs et les unités de référence - Fractionnement de l'unité

Présentation
Plusieurs présentations des fractions sont possibles : fractionnement de l'unité de grandeur, rapport partie/tout, commensuration de deux grandeurs. Quel que soit le type de situation choisi pour introduire les rationnels, les autres types font partie des problèmes que l'élève devra pouvoir résoudre à l'issue de la scolarité obligatoire.

L'activité ci-après propose une introduction à partir du fractionnement de l'unité. La manipulation est faite à la fois sur les longueurs et sur les aires, pour favoriser le transfert à d'autres grandeurs pour lesquelles les manipulations effectives sont difficiles à mettre en oeuvre en classe.

Les énoncés ci-après peuvent être utilisés pour conduire des séances de révision si les fractions ont déjà été introduites, les bilans étant raccourcis.

Partie 1 - Fractionnement de l'unité de longueur, fractions de type 1/n
Les élèves disposent d'une bande de papier de couleur, toutes de même longueur mais de largeur variable. *Chaque élève trace sur une feuille un segment qui ne touche pas les bords de la feuille. Consigne : Chacun devra mesurer la longueur du segment sans utiliser son double-décimètre, seulement à l'aide de la bande de papier de couleur. La mesure qu'il aura trouvée sera donnée à un autre élève qui tracera un segment de cette longueur. On comparera par superposition des feuilles en regardant par transparence devant la fenêtre.*

Procédures attendues
- Pliage en deux, puis en deux, etc.
- Pliage en trois, puis en trois ou en deux des parties obtenues, etc.
- Expressions, moitié, quart, la moitié de la moitié, la moitié du tiers, etc.

Bilan partiel
L'enseignant(e) introduit les notations 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 etc.
La mesure d'un segment est 1/4, si en répétant 4 fois la longueur ce la fait l'unité.
1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 = 1 (quatre fois un quart)
ou 4 x 1/4 = 1
Idem avec 1/3, 1/8, 1/16, etc.

L'enseignant(e) transforme des remarques orales en écritures mathématiques :
La moitié d'un tiers, on peut en mettre 6 pour faire la bande unité : 1/2 x 1/3 = 1/6
Deux quarts, c'est comme un demi :
1/4 + 1/4 = 1/2
Un demi, c'est plus grand qu'un tiers : 1/2 > 1/3
Un huitième, c'est plus petit qu'un tiers, parce qu'on a partagé en plus de parts : 1/8 < 1/3 etc.
Un début de répertoire est ainsi constitué, grâce à la manipulation, sans avoir besoin de faire de calcul.

Enfin, une extension est faite aux autres fractions de type 1/n, puis p/q.
Que représente 1/7 ? 1/35 ? quelle est la plus grande des deux fractions ?
L'enseignant(e) introduit la convention :
6/5, c'est six fois un cinquième
6/5 = 1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5
on écrit aussi 6/5 = 6 x 1/5

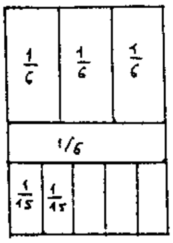
Partie 2- Fractionnement de l'unité d'aire, situation par rapport aux entiers
Les élèves sont par groupes, ils disposent de morceaux découpés dans des feuilles de bristol 21x29,7 de couleur (voir plan de découpage ci-après). Consigne : *Chaque groupe dispose de morceaux de bristol d'une même couleur et d'une feuille blanche 21x29,7. Les morceaux de couleur n'ont pas été découpés n'importe comment. Vous devez mesurer l'aire de chacun des morceaux en prenant la feuille blanche pour unité d'aire. Quand vous aurez fini, vous direz si l'aire totale de vos morceaux est plus grande que celle de la feuille blanche, plus petite, ou égale.*

Procédures attendues
- Tentative de disposer les morceaux de bristol pour reconstituer une feuille.
- Report fictif sur une feuille de papier de morceaux identiques.
- Découpage fictif ou réel de morceaux non superposables pour prouver l'égalité de leurs aires.

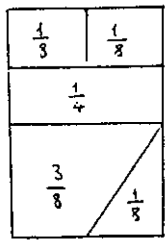
Bilan partiel
3/12 = 1/6 + 1/12

1 = 1/8 + 1/8 + 1/4 + 3/8 + 1/8 ou
1/6+1/6+1/6+1/6+1/15+1/15+1/15+1/15+1/15
ou encore 1 = 4/6 + 5/15

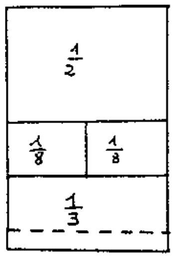
1/2 + 1/8 + 1/8 + 1/3 > 1 etc.



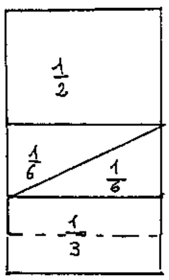
découpage jaune :
une feuille



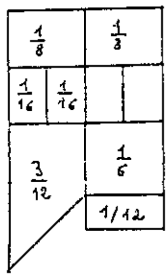
découpage gris
une feuille



découpage bleu :
plus d'une feuille



découpage rouge :
plus d'une feuille



découpage vert : une feuille.
le découpage vert vaut une feuille mais sans possibilité de la reconstituer à partir des morceaux fournis

Extensions à d'autres fractions
13/4, est-ce plus grand que 1 ? de combien ?
Entre quels nombres entiers 17/4 est-il situé ?

L'enseignant(e) écrit :
13/4 = 1 + 9/4

13/4 = 3 + 1/4 13/4 > 3
13/4 = 4 - 3/4 13/4 < 4
Il faut plus de 3 feuilles pour fabriquer 13/4, mais moins de 4 feuilles.

Partie 3 - Le double statut des nombres sur la droite numérique

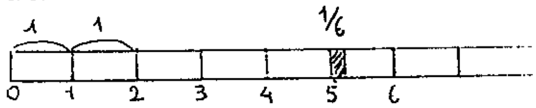
Les objets ne sont plus manipulés, les élèves travaillent sur des dessins.

L'enseignant(e) superpose au tableau la demi-droite numérique graduée avec des entiers, et des bandes de papier-unité partagées en sixièmes. Elle entoure un bloc de deux sixièmes et demande d'en évaluer l'aire. Idem avec un bloc de 9/6.

Consigne : *Je veux fabriquer une bande de papier qui aurait pour aire 31/6. Si je la pose comme ça au début de la droite (geste), jusqu'où cela irait-il ? Vous disposez de ficelle pour vous aider.*

Bilan partiel
Chaque unité est faite de 6 morceaux : cela en fait 30 pour 5 unités.
31/6 = 5 + 1/6.

L'enseignant(e) fait dessiner jusqu'où ira la bande de papier en inscrivant 31/6, 30/6, et la distance 1/6.



Ce travail est systématiquement repris avec des fractions usuelles (n/2, n/5, n/10, n/100).

Nous avons sauté ensuite le paragraphe IV de la brochure D & P *Développement des écritures et enrichissement de la graduation,* car nous voulions d'abord proposer le codage d'aires par des fractions, comme c'est proposé d'ailleurs dans la thèse de Perrin (p. 191). La brochure D & P présente le matériel, puis décrit l'organisation de la classe, indique les consignes. La tâche est ensuite analysée du point de vue didactique, un bilan partiel est fourni (p. 51 à 56). Le travail suivant consiste à comparer les puzzles du point de vue de la quantité de papier utilisée ; une institutionnalisation est proposée (p. 57 à 60).

Dans notre rédaction, nous avons résumé ces pages en l'équivalent d'une colonne et demie :
- nous avons fourni le dispositif décrit par M.J. Perrin dans sa thèse (p. 191),
- nous avons modifié la consigne de la brochure D & P,
- nous avons résumé les procédures attendues,
- nous avons donné quelques écritures additives et des écritures associées à la comparaison avec des entiers, sous la forme :

$13/4 = 3 + 1/4 \qquad 13/4 > 3$

$13/4 = 4 - 3/4 \qquad 13/4 < 4$

Consigne de la brochure D & P :

> Les élèves travaillent par équipes de 2. Chaque équipe reçoit 2 feuilles blanches et une enveloppe.
> Consigne : *Dans chaque enveloppe, il y a plusieurs pièces en papier. Avec une pièce, vous pouvez en général, en en prenant plusieurs copies, reconstituer une feuille entière. En assemblant les pièces de l'enveloppe, vous pouvez obtenir une feuille ou plus.*
> *1) Assembler les pièces comme un puzzle de façon à reconstituer une feuille entière et plus si nécessaire.*
> *2) Évaluer chaque pièce par rapport à une feuille, c'est-à-dire, pour chaque pièce, dire quelle fraction de feuille on utilise pour la réaliser.*
> *3) Passer commande du nombre de feuilles de papier nécessaires pour reproduire l'ensemble des pièces de l'enveloppe en faisant le moins possible de chutes. Le reproduire.*
> *4) Évaluer la quantité de papier effectivement utilisé et évaluer les chutes. Chacun dans l'équipe fait les calculs.*

Notre consigne :

> Les élèves sont par groupes, ils disposent de morceaux découpés dans des feuilles de bristol 21x29,7 de couleur (voir plan de découpage ci-après).
> Consigne : *Chaque groupe dispose de morceaux de bristol d'une même couleur et d'une feuille blanche 21x29,7. Les morceaux de couleur n'ont pas été découpés n'importe comment. Vous devez mesurer l'aire de chacun des morceaux en prenant la feuille blanche pour unité d'aire.*
> *Quand vous aurez fini, vous direz si l'aire totale de vos morceaux est plus grande que celle de la feuille blanche, plus petite, ou égale.*

La partie 3 est une reconstruction inspirée de la fin du chapitre III de la brochure D & P : § IV *Développement des écritures et enrichissement de la graduation* (p. 39 à 48). D'une part l'utilisation d'une bande-étroite permet de faire le lien entre les longueurs et les aires, d'autre part le double statut des nombres est illustré. Notre dispositif est, pour cette partie, différent de celui de la brochure D & P.

2.4- Suggestion 4 : Liaison entre ordre et addition

Cette suggestion (recto, présentée ci-après) est une adaptation d'une situation de B & B (p. 64 à 72) : module 4 (activités 1, 2 et 3). On trouve un dispositif voisin dans la brochure D & P, décrit au chapitre III : *Situer une fraction sur un axe gradué - Diviser un entier a par un entier b* (p. 63 à 70).

La suggestion traite des quotients d'entiers. Les écarts entre nombres sont représentés et constituent le support de l'activité. Le signifiant privilégié est la demi-droite numérique. Nous estimons important de situer les fractions dans un contexte additif, celui qui est sous-jacent à la droite numérique, en dépit du programme de sixième pour lequel les fractions s'apparentent à des opérateurs de proportionnalité. L'utilisation de cette suggestion pourra être rapprochée de certains exercices figurant dans la suggestion 1.

Dans la brochure B & B, la situation débute par un rappel collectif sur la comparaison avec des entiers, dont nous avons fait une partie à elle seule.

Pour la partie 2, nous avons repris tel quel l'exemple de la page 65 en résumant les procédures des élèves et le bilan partiel sur la droite numérique.

Pour la partie 3, nous avons repris intégralement les deux premiers dispositifs et leurs consignes (p. 68 et 69). La dernière consigne a été très légèrement modifiée, nous y avons intégré le décompte des points prévus à la fin du deuxième exercice et éliminé quelques détails de mise en scène.

Consigne de la brochure B & B :

> *Vous allez jouer de nouveau mais cette fois-ci je laisserai très peu de temps pour proposer un intervalle. Essayez de trouver une stratégie qui vous permettra d'évaluer très vite ce résultat, sans faire de calculs. Vous écrirez l'intervalle sur votre cahier et dès que je taperai dans les mains, un représentant ira écrire cet intervalle au tableau.*

Notre consigne :

> *Vous proposerez un intervalle. Si le résultat est dans l'intervalle proposé, l'équipe gagne un point.*
> *Si deux équipes ont donné un intervalle juste, celle qui a donné l'intervalle le plus petit gagne un point de plus.*
> Somme : 1/3 + 3/2 + 15/2
> ou 6/6 + 8/4 + 12/5

La dernière partie de notre suggestion reprend tout le début de la page 71 et résume le procédé de vérification indiqué en fin de chapitre.

2.5- Suggestion 5 : Liaison entre fraction et division euclidienne

Cette suggestion (recto, présentée ci-après) est une adaptation d'une situation de D & P, chapitre III - *Situer une fraction sur un axe gradué - Diviser un entier a par un entier b* (p.63 à 76). On la trouve aussi sous une forme voisine dans la brochure B & B (p. 73 à 94) : module 4 (activité 4) et du module 5 (activités 1, 2 et 3).

La situation utilise des quotients d'entiers. Les écarts entre nombres sont représentés et constituent le support de l'activité. Les fractions décimales apparaissent comme solution d'un problème. Le signifiant privilégié est la demi-droite numérique. Nous disposons ici d'une situation formelle permettant de faire des approximations décimales de rationnels.

Jeanne BOLON
IUFM, centre de Versailles

Avril 1994

Suggestion 4 : Liaison entre ordre et addition

Présentation

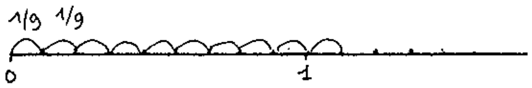
Dans la plupart des ouvrages, la comparaison de décimaux ou de fractions se fait indépendamment des opérations sur ces nombres. On se demande si ce n'est pas à l'origine de difficultés ultérieures quand les élèves font du calcul d'estimation, utilisent les intervalles en liaison avec les inégalités.

Ici on propose un situation de recherche qui met en scène le calcul approché à propos de fractions. Le mot "intervalle" est introduit de manière intuitive. Les définitions correspondantes ne sont pas nécessaires au déroulement de l'activité.

Partie 1- Comparaison de grandeurs avec des grandeurs entières

Entrée en matière : *Vous avez déjà utilisé des fractions 22/9, 13/4, 5/18.*
22/9 m, est-ce plus grand que 3 mètres ?
13/4 de litre, est-ce plus grand que 5 litres ?
5/18 kg, est-ce plus grand que un kg ? plus grand que 200 g ?

La comparaison avec les entiers se fait en revenant au sens des fractions :
1 = 9/9 (neuf fois 1/9) et donc 3 = (3 x 9)/9, avec représentation sur la droite graduée :



Partie 2 : Comparaison "mixte" - Quel est le nombre le plus proche de la somme ?

Consigne : *Je vous donne une somme de fractions, et je vous donne aussi trois nombres. Vous devrez dire, parmi ces trois nombres, celui qui est le plus proche de la somme.*
Somme : 17/5 + 15/2 + 8/5
Nombres : 115/10 12 38/3

Le travail peut être fait à deux ou par équipe (compétition entre équipes).

Procédures attendues des élèves
- Recherche des parties entières des nombres en jeu et estimation des "restes",
- Réduction des fractions de la somme au même dénominateur, puis comparaison deux à deux avec les nombres fournis.

Pour la correction, les écarts sont calculés et ils sont représentés sur une droite numérique.

N.B. : Des exemples sont à ajouter.

Partie 3 : Le compte est "dedans"

Consigne : *Je ne vais plus vous demander de dire quel est le nombre le plus proche d'une somme, mais quand je vous proposerai une somme, vous devrez me donner deux nombres :*
- un dont vous êtes sûr qu'il est plus petit que la somme,
- un dont vous êtes sûr qu'il est plus grand que la somme.
Par exemple, si la somme était 125/60, que pourriez-vous me proposer ?
Si les élèves ne proposent que des entiers, l'enseignant demande si l'on pourrait trouver aussi des fractions.

L'enseignant choisit une solution, par exemple $1 < 125/60 < 4$, et il annonce : *Toutes les fractions qui se trouvent entre ces deux nombres, 1 et 4, forment un "intervalle".*

Consigne suivante : *Trouvez un intervalle qui contient 48/5 + 22/3 + 8/5.*
Les nombres sont choisis pour faciliter le calcul mental. Ce n'est pas le calcul algébrique sur les sommes qui est visé, mais la représentation des écarts entre les nombres en liaison avec l'écriture d'inégalités.

Les élèves proposent différents intervalles. Ils sont représentés sur la droite numérique. Il y en a de plus petits que d'autres.

Nouvelle consigne : *Vous proposerez un intervalle. Si le résultat est dans l'intervalle proposé, l'équipe gagne un point.*
Si deux équipes ont donné un intervalle juste, celle qui a donné l'intervalle le plus petit gagne un point de plus.

Somme : 1/3 + 3/2 + 15/2
ou 6/6 + 8/4 + 12/5

Partie 4 : Retour aux grandeurs : validation

Des bandes de Bristol sont fournies avec l'indication de leurs longueurs exprimées sous forme de fractions. Par exemple, 2/3, 3/5, 3/2.
L'enseignant les met bout à bout : *Proposez un intervalle pour la longueur totale.*

Les élèves proposent des intervalles.

Des élèves découpent des bandes aux longueurs correspondant à des nombres extrémités d'intervalles : on place les bandes côte à côte pour vérifier que les nombres proposés sont corrects.

Jeanne BOLON
IUFM, centre de Versailles

Avril 1994

Suggestion 5 : Liaison entre fraction et division euclidienne

Présentation
Les élèves de l'école primaire ont appris à diviser des entiers pour obtenir un quotient et un reste. Ils ont donné du sens à l'écriture fractionnaire. Mais le lien entre division "exacte" (fractions) et division euclidienne ne va pas de soi : c'est l'objet des activités ci-après.

Cette fiche suppose que le mot "intervalle" ait déjà été employé de manière intuitive avec les élèves : voir par exemple la suggestion 4.

Partie 1- Comparaison entre fraction et entiers
Consigne : *J'ai choisi un fraction comprise entre 0 et 100. Elle n'est pas égale à un nombre entier. Vous allez me poser des questions auxquelles je répondrai par oui ou par non. Vous n'aurez droit qu'à dix questions.*
Vous ne devrez pas deviner la fraction, mais savoir à peu près ce qu'elle est. Après les 10 questions, vous donnerez un intervalle de nombres entiers, le plus petit possible qui contient le fraction (voir suggestion 4). *La calculatrice n'est pas autorisée.*

Les élèves travaillent par deux, ou par équipes plus nombreuses. Ils se concertent au sein de leur équipe avant de proposer des questions pour savoir comment exploiter les réponses fournies auparavant.

A la fin d'une partie, l'enseignant demande aux élèves de dire comment ils ont fait. Il souligne l'intérêt de représenter les nombres sur une droite numérique.

Consigne : *Ce n'est plus moi qui vais donner une fraction, mais une équipe de 2 élèves. Je vais désigner les équipes de 2 élèves qui choisiront une fraction et ceux qui les interrogeront. Cela se passera par écrit pour faire moins de bruit. Attention : la fraction ne doit pas être égale à un nombre entier et il n'y a pas plus de 10 questions.*

A la fin de la partie, tous les partenaires, au vu de la fraction, contrôlent l'encadrement trouvé. Ensuite on échange le rôle des équipes (dans le cas d'un jeu équipe contre équipe).

<u>Procédures attendues de la part des élèves</u>
Pour ceux qui choisissent la fraction :
- Soit ils ont choisi un intervalle d'entier, puis une fraction incluse. La réponse aux questions est facile.
-Soit ils ont choisi d'abord la fraction, et il faut calculer une fraction équivalente aux entiers proposés par les questionneurs pour situer la leur, ce qui les oblige à utiliser la division euclidienne, au moins de manière implicite).

Les élèves qui choisissent peuvent avoir l'intuition que c'est plus facile si les dénominateurs sont de la forme 10, 100, 1000...
Pour les enfants qui questionnent : ils diminuent l'incertitude en partageant l'intervalle [0, 100] en deux, puis à nouveau en deux, etc. L'utilisation d'une droite numérique simplifie le traitement.

Les élèves se posent en général la question des bords : on pourra alors introduire les notations de type [a b[.

<u>Bilan</u>
Il partira des messages écrits, que les élèves pourront commenter.
Si $a < b$, alors $a/b < 1$.
Pour comparer un entier n à a/b, on compare nxb/b à a/b, ou on cherche combien il y a d'entiers dans a/b (la partie entière).
Écritures de type $a/b = n + c/b$, avec $c/b < 1$

Partie 2- Comparaison entre fraction et fractions décimales
Consigne : *Vous allez encore jouer équipe de deux contre une équipe. Le nombre de coups est toujours fixé à 10.Vous ne devrez pas deviner la fraction mais savoir à peu près ce qu'elle est. Cette fois-ci, la fraction cachée est comprise entre 5 et 10. Elle n'est pas égale à un nombre entier. Après les 10 questions, vous donnerez un intervalle avec des fractions, le meilleur possible. L'équipe qui se sera le plus rapprochée de la fraction cachée aura gagné. Pour gagner du temps, je vous autorise à prendre votre calculatrice.*

Si les élèves ne pensent pas aux fractions décimales, l'enseignant pourra en suggérer lors du questionnement.

<u>Procédures attendues</u>
- Comparaison systématique avec des fractions de dénominateur 10, puis 100, puis 1000...
- Réinterprétation des chiffres de la calculatrice (division de a par b).

<u>Bilan</u>
Il partira des messages écrits, que les élèves pourront commenter.
La division à la main "que l'on pousse" ou la calculatrice permettent d'écrire des égalités du genre : $a/b = n + c/100 + d/(bx100)$

Nous avons dédoublé le dispositif de la brochure D & P (p. 66), en faisant jouer d'abord les élèves contre l'enseignant. L'analyse de la tâche des élèves a été très résumée. Nous avons exprimé le bilan sous une forme très proche de la brochure D & P. Nous avons reformulé la consigne car elle n'était pas exprimée dans le registre de langue qu'on utilise avec les élèves.

Consigne et dispositif de la brochure D & P :

> Les élèves jouent par équipes de 2, équipe contre équipe ou une équipe de 2 élèves contre toute la classe.
> *Consigne : Une équipe (composée de 2 élèves E1, E2) choisit une fraction a/b comprise entre 0 et 100 et qui n'est pas égale à un nombre entier. Les autres joueurs (une autre équipe ou le reste de la classe), qui ne connaissent pas cette fraction doivent en au plus 10 questions, déterminer un intervalle dans lequel se trouve la fraction avec une erreur d'au plus une unité, c'est à dire situer le mieux possible la fraction entre deux entiers.*
> *On ne peut répondre aux questions que par oui ou par non.*
>
> A la fin de la partie, tous les partenaires, au vu de la fraction, contrôlent l'encadrement trouvé. Ensuite on échange le rôle des équipes (dans le cas d'un jeu équipe contre équipe).

Nos consignes et dispositifs :

> Consigne : *J'ai choisi une fraction comprise entre 0 et 100. Elle n'est pas égale à un nombre entier. Vous allez me poser des questions auxquelles je répondrai par oui ou par non. Vous n'aurez droit qu'à dix questions.*
> *Vous ne devrez pas deviner la fraction, mais savoir à peu près ce qu'elle est. Après les 10 questions, vous donnerez un intervalle de nombres entiers, le plus petit possible, qui contient le fraction* (voir suggestion 4). *La calculatrice n'est pas autorisée.*
>
> Les élèves travaillent par deux, ou par équipes plus nombreuses. Ils se concertent au sein de leur équipe avant de proposer des questions pour savoir comment exploiter les réponses fournies auparavant.
>
> A la fin d'une partie, l'enseignant demande aux élèves de dire comment ils ont fait. Il souligne l'intérêt de représenter les nombres sur une droite numérique.
>
> Consigne : *Ce n'est plus moi qui vais donner une fraction, mais une équipe de 2 élèves. Je vais désigner les équipes de 2 élèves qui choisiront une fraction et ceux qui les interrogeront. Cela se passera par écrit pour faire moins de bruit. Attention : la fraction ne doit pas être égale à un nombre entier et il n'y a pas plus de 10 questions.*
>
> A la fin de la partie, tous les partenaires, au vu de la fraction, contrôlent l'encadrement trouvé. Ensuite on échange le rôle des équipes (dans le cas d'un jeu équipe contre équipe).

Pour notre deuxième partie, nous avons repris un dispositif voisin de celui de la brochure, mais en autorisant l'emploi de la calculatrice. Nous avons évoqué très brièvement les procédures possibles de la part des élèves. Nous avons reformulé la consigne qui était donnée en style indirect.

Consigne et dispositif de la brochure D & P :

> On reprend la consigne III.1.3 de la façon suivante : le nombre de coups est fixé à 10. Les équipes jouent à tour de rôle. L'équipe qui est le plus près de la fraction choisie par l'équipe adverse a gagné. On limite davantage l'intervalle de départ pour

en arriver plus vite à l'affinement de la graduation : par exemple choisir la fraction entre 5 et 10.

Notre consigne :

Consigne : *Vous allez encore jouer équipe de deux contre une équipe. Le nombre de coups est toujours fixé à 10.Vous ne devrez pas deviner la fraction mais savoir à peu près ce qu'elle est. Cette fois-ci, la fraction cachée est comprise entre 5 et 10. Elle n'est pas égale à un nombre entier. Après les 10 questions, vous donnerez un intervalle avec des fractions, le meilleur possible. L'équipe qui se sera le plus rapprochée de la fraction cachée aura gagné. Pour gagner du temps, je vous autorise à prendre votre calculatrice.*

2.6- Suggestion 6 : Problèmes additifs/soustractifs

Cette suggestion (recto, présentée ci-après) est inspirée de la synthèse faite par Fayol [5] (1990). Elle utilise des entiers, des décimaux, des quotients d'entiers dans des types de problèmes décrits dans la littérature psychologique et didactique[6]. La feuille invite également à donner une illustration de la liaison entre addition, soustraction et écart.

Notre but est de disposer d'indices sur la manière dont les enseignants sont prêts à recontextualiser les notions mathématiques, ainsi que sur les types de classification qu'ils privilégient : par opération mathématique ou selon des catégories de problèmes analogues à celles des recherches psychologiques et didactiques.

2.7- Suggestion 7 : Problèmes multiplicatifs/"divisifs"

Cette suggestion (recto, présentée ci-après) est une adaptation très libre d'une série de situations présentées dans la brochure B & B pour enrichir la notion de division (modules 12 et 13, p. 262 à 328).

Elle adopte un plan identique à celui de la suggestion 6 sur les problèmes additifs/soustractifs. Elle utilise des entiers, des décimaux, des quotients d'entiers. Sans le souligner explicitement, elle montre que la classification par les opérations arithmétiques n'est pas la seule possible.

Notre propos est semblable à celui de la suggestion 6. Nous avons montré au chapitre II que les textes officiels insistent sur la liaison avec les problèmes sans l'illustrer, alors qu'ils sont beaucoup plus détaillés sur les propriétés formelles des décimaux. Mettre en évidence différents types de situations qui sont modélisés par les opérations arithmétiques classiques nous a paru un bon test.

2. 8- Suggestion 8 : Les grandeurs et les unités de référence, l'algèbre sous-jacente

Cette suggestion (recto-verso, présentée ci-après) est inspirée d'une activité bâtie par Brun et Conne [7] (1988).

Il s'agit de monter les relations entre nombres, unité de mesure et objets physiques. Les grandeurs sont effectives ici : longueurs, aires, masses.

La première partie invite à fabriquer des objets à partir d'un nombre (quotient d'entiers) et d'une unité de mesure.

---

5 FAYOL, M., *L'enfant et le nombre - Du comptage à la résolution de problèmes*, Neuchâtel, Paris, Delachaux et Niestlé, 1990.

6 Leurs scores de réussite sont très différenciés à l'école primaire.

7 BRUN, J. & CONNE, F. (1988), Transcriptions et comptes rendus d'observation, in *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire, Université d'été d'Olivet* (pp. 250-272), Bordeaux: IREM de Bordeaux.

Jeanne BOLON
IUFM, centre de Versailles

11/1993

Suggestion 6 : Problèmes additifs/soustractifs

Présentation

Les types de problèmes additifs ont été répertoriés dans la littérature scientifique depuis quelques années. Les manuels n'en ont pas encore tenu compte. Le travail ci-après peut être conduit comme un retour en arrière sur les apprentissages, une façon de structurer les savoirs antérieurs.

Partie 1- Les entiers

Consigne : *Inventez un problème où l'on aurait à calculer 13 + 49*
Idem avec 13 + 1058
Idem avec 49 - 13
Idem avec 1058 - 49.
Vous écrirez votre énoncé sur une feuille au feutre, pour que toute la classe puisse le lire quand nous l'afficherons.
Nous regrouperons ensuite les problèmes qui se ressemblent.

Classifications

Elles peuvent partir des suggestions des élèves :
* Énoncés avec grandeurs ou énoncés sans grandeurs.
* Problèmes que l'on résout avec une addition, problèmes que l'on résout avec une soustraction.

* Énoncés que l'on peut structurer comme :
- réunion de classes, partition de classes, (l'inconnue portant sur le total ou sur un des éléments de la somme),
- état initial / transformation (positive ou négative) / état final (l'inconnue pouvant être à l'un des 3 emplacements),
- transformation (positive ou négative) suivie de transformation (positive ou négative) et transformation bilan (l'inconnue pouvant être à l'un des 3 emplacements),
- écart (positif ou négatif) entre deux mesures de grandeurs, (l'inconnue pouvant être à l'un des 3 emplacements).

Il est probable que les élèves ne produiront pas tous ces types d'énoncés.
Pour les amener à enrichir leurs énoncés, l'enseignant peut partir d'un énoncé déjà écrit avec sa solution, puis il change la place de l'inconnue en barrant une information numérique de l'énoncé initial et en conservant la solution.
Consigne : *Écrivez un énoncé où on aurait à chercher l'information que j'ai barrée et où l'on aurait l'information de la solution.*

Partie 2- Les rationnels et décimaux

Consigne : *Inventez un problème où l'on aurait à calculer 13 /5+ 49/10*
Idem avec 13 + 1,058
Idem avec 49 /2- 13/5
Idem avec 1,058 - 0,49
Vous écrirez votre énoncé sur une feuille au feutre, pour que toute la classe puisse le lire quand nous l'afficherons.
Nous regrouperons ensuite les problèmes qui se ressemblent.

Classifications

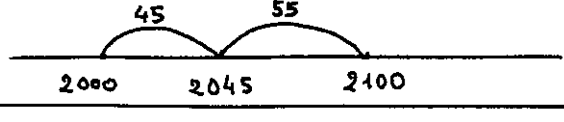
On retrouvera sans doute les deux premières classifications. La troisième ne pourra pas être formulée de la même manière.
A quoi peut correspondre l'addition des nombres quand il s'agit de mètres, de secondes, de litres, de kilogrammes, etc. ? Il faut revenir aux instruments de mesure et aux situations physiques :
- la mise bout à bout pour des longueurs,
- le pavage sans trou ni recouvrement pour les aires,
- des durées d'intervalles de temps qui se suivent,
- des masses que l'on pèse en même temps,
- etc.
Les significations *physiques* de l'addition (et donc de la soustraction) des nombres seront aussi à expliciter dans le langage des transformations : "ajouter 10 kg", "10 kg de plus que ...", etc., en faisant varier à nouveau la place des inconnues.

L'enseignant pourra discuter de la légitimité d'écrire 1,058 - 0,49. Quand les physiciens font des mesures directes de grandeurs, les précisions obtenues sont en général identiques. Un physicien écrirait : 1,06 - 0,49.
Mais on peut supposer que les nombres 1,058 et 0,49 ont été obtenus par calcul. La calculatrice n'affiche pas 0,490 mais 0,49 : cela a du sens d'écrire 1,058 - 0,49.

Partie 3- Addition, soustraction et écart

Consigne : *Inventez un problème où l'on aurait à dire si 2045 est plus près de 2000 ou de 2500.*
Idem, si 2,045 est plus près de 2 que de 2,05
Idem, si 65/7 est plus près de 9 que de 10.

L'intérêt est de produire des écritures du genre :
2045 = 2000 + 45 et 2045 = 2100 - 55
2,045 = 2 + 0,045 et 2,045 = 2,05 - 0,005
associées à des représentations sur la droite numérique (écarts).



Jeanne BOLON
IUFM, centre de Versailles

11/1993

Suggestion 7 : Problèmes multiplicatifs/"divisifs"

Présentation
Les sens de la multiplication se sont enrichis depuis l'addition répétée du cours élémentaire. Mettre de l'ordre dans les différents types de problème est le but des activités suivantes.

Partie 1- Les entiers
Consigne : *Inventez un problème où l'on aurait à calculer 13 x 49*
Idem avec 13 x 1058
Idem avec 49 : 13
Idem avec 1058 : 49.
Vous écrirez votre énoncé sur une feuille au feutre, pour que toute la classe puisse le lire quand nous l'afficherons.
Nous regrouperons ensuite les problèmes qui se ressemblent.

Classifications
Elles peuvent partir des suggestions des élèves :
* Énoncés avec grandeurs ou énoncés sans grandeurs.
* Problèmes que l'on résout avec une multiplication, problèmes que l'on résout avec une division.

* Énoncés que l'on peut structurer comme :
- recherche d'un quotient euclidien ou d'un reste euclidien (nombres entiers, nombres décimaux)
- transformation linéaire avec image de l'unité (3 F le kg), ou non (5 F les 7 carambars), l'inconnue pouvant être à l'un des 3 emplacements,
- mesure-produit (aire, volume, produit cartésien, etc.), l'inconnue pouvant être à l'un des 3 emplacements,
- rapport partie / tout, l'inconnue pouvant être à l'un des 3 emplacements,
- utilisation d'unités de grandeurs différentes et compatibles entre elles,
- transformation (agrandissement ou réduction) suivie de transformation (agrandissement ou réduction) et transformation bilan, l'inconnue pouvant être à l'un des 3 emplacements.

Il est probable que les élèves ne produiront pas tous ces types d'énoncés. Comme dans la feuille "Suggestion 6", l'enseignant peut partir d'un énoncé déjà écrit avec sa solution, puis il change la place de l'inconnue en barrant une information numérique de l'énoncé initial et en conservant la solution.
Consigne : *Écrivez un énoncé où on aurait à chercher l'information que j'ai barrée et où l'on aurait l'information de la solution.*

Partie 2- Les rationnels et décimaux
Consigne : *Inventez un problème où l'on aurait à calculer 14 /6 x 9/13*
Idem avec 13 x 10,58
Idem avec 0,13 x 10,58

Idem avec (49/5) : (13/2)
Idem avec 10,58 : 49.
Idem avec 10,58 : 0,43

Vous écrirez votre énoncé sur une feuille au feutre, pour que toute la classe puisse le lire quand nous l'afficherons.
Nous regrouperons ensuite les problèmes qui se ressemblent.

Classifications
Les deux premières classifications ne posent pas de problèmes. Il est plus difficile, mais plus riche de voir que le produit de deux rationnels trouve du sens dans chacun des alinéas de la partie 1, sauf celui du quotient euclidien, à condition que les grandeurs en jeu soient exprimées par des rationnels.
- prix de 14/6 de mètres quand le tarif est de 9 F pour 13 mètres,
- aire d'un rectangle de dimension 14/6 sur 9/13,
- les 9/13 d'un stock de 14/6 de tonnes,
- agrandissement (14/6) suivi d'une réduction (9/13),
- longueur d'une bande (en mètre) qui a coûté 10,58 F quand le prix au mètre est 0,43 F, etc.

La variation de la place de l'inconnue permet d'enrichir la liste des types d'énoncés.

Bilan
Il est intéressant d'utiliser des représentations fléchées pour les transformations et leurs inverses. L'équivalence : 49 et x 1/49 peut être mise en évidence.

Partie 3- Plus grand, plus petit ?
Consigne : *Vous avez inventé un problème où l'on aurait eu à calculer 14 /6 x 9/13.*
Pouvez-vous dire, sans faire le calcul, si les nombres suivants sont plus grands ou plus petits que 14 /6 x 9/13 :
15/6 x 9/13
14/6 x 7/13
14/9 x 9/17
Vous devrez donner des raisons.

Les conclusions concernant l'ordre sont faciles quand le produit de rationnels correspond à une mesure-produit ou à une transformation linéaire.

Jeanne BOLON
IUFM, centre de Versailles

Avril 1994

Suggestion 8 : Grandeurs et unités de référence - Algèbre sous-jacente

Présentation
Les manuels introduisent le plus souvent les fractions par partage de longueurs sur une demi-droite numérique, qui est progressivement graduée. La longueur en tant que grandeur n'est pas toujours mise en évidence et certains élèves ne font pas le rapport entre la fraction comme position et la fraction comme mesure de grandeur (distance à l'origine), ce qui est gênant pour le sens de l'addition et de la soustraction.

D'autre part, les conversions d'unités gênent souvent les élèves pour qui le tableau du système métrique est utilisé indépendamment des relations multiplicatives entre unités.

Le but des activités décrites ci-après est d'installer (ou de restaurer) la liaison entre fraction et mesure de grandeur, en insistant sur la prise en compte physique de l'unité de référence. Plusieurs grandeurs sont utilisées, d'une part pour favoriser le réemploi des fractions dans la résolution de problèmes dits concrets, d'autre part pour conférer ultérieurement à la représentation de la demi-droite numérique un statut général.

Les activités sur les grandeurs (longueurs, aires, masses) partent ici de manipulations effectives d'objets, puis les manipulations sont évoquées.

Partie 1 - Des nombres et de l'unité de référence à la constitution d'objets
Longueurs
Distribuer une série de bouts de ficelle de même longueur. L'une d'entre elles, colorée, sera l'unité de référence. Consigne : *Fabriquez un bout de ficelle qui aura pour longueur le quart de la ficelle colorée (1/4), un autre qui aura pour longueur sept tiers de la ficelle colorée (7/3), un autre qui aura pour longueur deux cinquièmes de la ficelle colorée (2/5).*
(La vérification se fera par superposition : on se mettra d'accord sur la tolérance acceptable : quelques millimètres).

Aires
Distribuer une série de rectangles superposables. L'un d'entre eux, coloré, sera l'unité de référence. Consigne : *Fabriquez une surface, pas forcément rectangle, qui aura pour aire le quart de la feuille colorée (1/4), un autre qui aura pour aire sept tiers de la feuille colorée* (7/3), *un autre qui aura pour aire deux cinquièmes de la feuille colorée (2/5).*
(La vérification se fera par superposition : on se mettra d'accord sur la tolérance acceptable : quelques millimètres).

Masses
Distribuer une série de sacs de sable de même masse (vérification par une balance de ménage). L'un d'entre eux, coloré, sera l'unité de référence. Consigne : *Fabriquez un sac qui aura pour masse le quart du sac coloré (1/4), un autre qui aura pour masse quatre tiers du sac coloré (4/3), un autre qui aura pour masse deux cinquièmes du sac coloré (2/5).*
(Ici, les calculs pourront servir de vérification à partir des graduations de la balance de ménage. Là aussi, il faudra se mettre d'accord sur une tolérance acceptable : quelques grammes).

On affichera des résultats comme :
$7/3 = 1 + 1 + 1/3$
$7/3 = 7 \times 1/3$
$2/5 = 1/5 + 1/5$
$2/5 = 2 \times 1/5$
$2/5 < 1$ $\quad$ $2/5 = 1 - 3/5$
$7/3 < 3$ $\quad$ $7/3 = 3 - 2/3$
$7/3 > 2$ $\quad$ $7/3 = 2 + 1/3$

Sur la demi-droite numérique, les distances des fractions aux entiers les plus proches seront représentées.

Partie 2 - Des objets et des nombres à l'unité de référence
Consigne : *J'ai changé les unités de référence. Je vais donner à chacun des objets avec une indication de leur mesure. Vous devrez reconstituer l'unité de référence. Attention, tous les groupes n'auront pas forcément les mêmes unités de référence.*

Ficelles : 2 tailles différentes, l'une le tiers de l'autre ; nombres associés : 3, 1/2, 2/5, 1/4.

Rectangles : 2 tailles différentes, l'une la moitié de l'autre ; nombres associés : 2, 1/2, 1/5, 3/4.

Masses : 2 tailles différentes, l'une la moitié de l'autre ; nombres associés : 2, 1/2, 2/3, 1/4.

Au moment de la correction, l'enseignant tirera la "morale" de l'histoire : le nombre ne suffit pas pour décrire une longueur (ou une aire, ou une masse), il faut savoir quelle est l'unité de référence ; plus l'unité de référence est grande, plus le nombre est petit.

Partie 3 - L'algèbre associée aux grandeurs : jeu de communication sur les longueurs
Consigne : *Je donne à chaque groupe une bobine de ficelle, une bande unité et une indication de longueur. Les groupes n'ont pas tous les mêmes indications. Vous jouerez telle équipe contre telle équipe : vous vous poserez des questions d'une équipe à l'autre, par écrit, pour savoir qui des deux équipes a la ficelle la plus longue. Vous n'avez pas le droit de demander à l'autre équipe combien sa ficelle mesure en centimètres. Vous avez droit à toutes les autres questions. Vous pouvez aussi dessiner.*
Quand vous serez sûrs de savoir qui des deux groupes a la ficelle la plus longue, vous rédigerez sur une feuille comment vous avez fait pour être sûrs.

Équipe A1 : unité de 8 cm, (cette indication n'est pas fournie aux enfants), longueur 3 (indiquée aux enfants)
Équipe A2 : unité de 12 cm, longueur 2

Équipe B1 : unité de 7 cm, longueur 4
Équipe B2 : unité de 15 cm, longueur 2.

Au moment de la correction, l'enseignant tirera la "morale" de l'histoire :
- si on multiplie l'unité de référence par 2, la mesure de longueur est divisée par 2,
- si on multiplie l'unité de référence par 3, la mesure de longueur est divisée par 3, etc.

Partie 4 - L'algèbre associée aux longueurs : le jeu de communication est évoqué
Consigne : *On va toujours jouer équipe contre équipe, mais maintenant, je vais garder les unités de mesure à mon bureau, je donnerai aux deux équipes qui jouent l'une contre l'autre les mêmes renseignements. L'équipe qui aura trouvé la première quelle est la ficelle la plus grande aura gagné.*

Équipes A1 et A2 :
la ficelle rouge a pour longueur 2 avec l'unité A ;
la ficelle bleue a pour longueur 4 avec l'unité B ;
il faut 3 A pour faire un B.

Idem avec d'autres nombres entiers pour les autres équipes.

Une fois que les élèves auront compris, on passera au système décimal, avec des nombres plus grands.

Équipes A1 et A2 :
la ficelle rouge a pour longueur 35 avec l'unité A ;
la ficelle bleue a pour longueur 4 avec l'unité B ;
il faut 10 A pour faire un B.

Équipes B1 et B2 :
la ficelle rouge a pour longueur 435 avec l'unité C ;
la ficelle bleue a pour longueur 4 avec l'unité D ;
il faut 100 C pour faire un D.

Partie 5 - L'algèbre associée aux masses : le jeu de communication est évoqué, mais on peut vérifier avec du matériel

Consigne : *Je me suis fabriqué des unités de masse (présentées aux élèves) et j'ai pesé des objets (présentés aux élèves. On va toujours jouer équipe contre équipe, je donnerai aux deux équipes qui jouent l'une contre l'autre les mêmes renseignements. L'équipe qui aura trouvé la première quelle est la masse la plus grande aura gagné.*

Équipes A1 et A2 :
le paquet rouge a pour masse 2 avec l'unité A ;
le paquet bleu a pour masse 4 avec l'unité B ;
il faut 3 A pour faire un B.

Idem avec d'autres nombres entiers pour les autres équipes.

Une fois que les élèves auront compris, on passera au système décimal, avec des nombres plus grands.

Équipes A1 et A2 :
le paquet rouge a pour masse 35 avec l'unité A ;
le paquet bleu a pour masse 4 avec l'unité B ;
il faut 10 A pour faire un B.

Équipes B1 et B2 :
le paquet rouge a pour masse 435 avec l'unité C ;
le paquet bleu a pour masse 4 avec l'unité D ;
il faut 100 C pour faire un D.

Bilan de ces séances
Quand on mesure un objet avec deux unités, on trouve deux nombres pour le mesurer ; le nombre le plus grand est celui qui correspond à l'unité la plus petite.
On peut représenter par un schéma ou par un calcul:

/10
345 km = 3450 hm
x10

345 km = 3450 hm
1km = 10 hm
345 x 10 hm = 3450 hm

x100
345 dam = 3,45 km
/100

345 dam = 3,45 km
1 dam = 1/100 km
345 x 1/100 km = 3,45 km

La deuxième partie invite à retrouver l'unité de longueur à partir d'objets et de nombres. Les troisième et quatrième parties mettent en scène les rapports inverses entre nombres et unités de longueurs, les objets étant disponibles, puis évoqués. La cinquième partie propose une extension au contexte des masses, les objets étant évoqués.

Cette suggestion a été conçue pour que les enseignants expriment leur point de vue sur la gestion mathématique des unités physiques de grandeurs courantes, par le biais d'étude de situations où les unités, bien que non conventionnelles, présentent des rapports multiplicatifs simples entre elles. Elle pourrait être rapprochée de la suggestion 3.

2.9- Suggestion 9 : Les grandeurs et les unités conventionnelles

L'ordre de grandeur physique de certains objets n'est pas toujours maîtrisé. La suggestion (recto, présentée ci-après) propose de situer dans l'échelle du système métrique les propriétés d'objets familiers. Les notations décimales et fractionnaires sont proposées.

Cette suggestion a été fabriquée pour que les enseignants expriment leur point de vue sur la place de l'entraînement à l'ordre de grandeur physique dans leur enseignement.

2.10- Suggestion 10 : Agrandissement d'un puzzle

Cette suggestion (recto-verso, présentée ci-après) est un résumé de la situation de B & B. Elle se trouve également dans D & P.

Dans la présentation introductive, nous avons proposé plusieurs emplois possibles de la suggestion.

> *Suivant le niveau de la classe, la situation peut être utilisée pour :*
> *- comparer les effets géométriques des opérateurs additifs et des opérateurs multiplicatifs sur les dimensions,*
> *- faire utiliser les propriétés "scalaires" de la proportionnalité,*
> *- introduire la fraction comme opérateur multiplicatif, opérant sur des entiers,*
> *- donner du sens au produit de deux fractions.*

Dans la première partie, le dispositif est celui de la brochure B & B (p. 137 et 138). Nous y avons ajouté les caractéristiques du puzzle, telles qu'elles sont décrites dans la brochure D & P, au cas où les enseignants auraient voulu faire d'autres découpages. Nous avons limité les agrandissements, pour que la gestion des comptes-rendus de groupes soit moins longue. Nous avons condensé les deux premières activités (p 141 à 144) en une seule. Nous avons résumé les procédures attendues. Nous avons ajouté au bilan partiel des exploitations possibles par des classes qui auraient déjà travaillé la proportionnalité.

Dans la deuxième partie, les images sont des quotients d'entiers (multiplicateur non fourni). Nous avons repris le dispositif décrit dans les pages 145 à 151, avec les procédures attendues et les bilans partiels. Nous avons parfois utilisé un langage destiné aux enseignants plus qu'aux élèves.

Jeanne BOLON
IUFM, centre de Versailles

Avril 1994

Suggestion 9 : Grandeurs et unités conventionnelles

Présentation

On trouve dans tous les manuels des exercices de changements d'unités à propos de grandeurs. Les élèves arrivent, à peu près correctement à les traiter quand ils ont le tableau à leur disposition, mais les résultats s'effondrent bien souvent quand on supprime l'évocation du tableau.

Les activités décrites ont pour but d'installer quelques repères physiques sur les unités usuelles (longueurs, aires, masses, volumes) de sorte que les élèves disposent de contrôles externes sur les résultats de mesures qu'ils annoncent.

Rappelons que la fiche "Suggestion 8" a pour but d'installer des propriétés algébriques liées au changement d'unité. Elle est complémentaire de celle-ci.

Le travail sera conduit parallèlement sur les trois grandeurs : longueurs, aires, masses.

Longueurs

En atelier "technologie", les élèves fabriqueront des bandes de papier de 1 cm, 1 dm, 1 m, 1 dam. Ces bandes seront affichées (le dam sera mis dans le couloir). Des égalités seront écrites sous forme entière ou décimale :

1 cm = 0,01 m
1 cm = 1/100 m ou 1m : 100 ou 1 m /100
1 m = 100 cm etc.
éventuellement avec des puissances de dix.

Une fois affichées ces bandes et ces égalités, l'enseignant(e) pose la question :
Je vous décrirai une longueur, vous devrez me dire deux unités de longueur, l'une plus petite que celle que je vous ai décrite, l'autre plus grande. Par exemple, je vous dis : la plus grande dimension d'une gomme. Vous écrivez sur l'ardoise :
L> 1 cm (l'objet est plus grand qu'un centimètre)
L < 1 dm (l'objet est plus plus petit qu'un décimètre).
Des exemples assez familiers sont donnés aux enfants. En cas de désaccord, une ficelle permet de contrôler les affirmations.

Aires

En atelier "technologie", les élèves fabriqueront des rectangles de papier de 1 cm2, 1 dm2, 1 m2 ; 1 dam2 sera dessiné dans la cour. Il y aura plusieurs rectangles de 1 dm2 (on permettra évidemment la disposition carrée, mais elle ne sera pas la seule). Ces rectangles seront affichés.

Des égalités seront écrites sous forme entière ou décimale :
1 cm2 = 0,01 dm2
1 cm2 = 1/100 dm2 ou 1 dm2 : 100
1 dm = 100 cm2 ou avec des puissances de dix.

L'enseignant(e) pose la question : *On fera pour les aires comme pour les longueurs, je vais vous décrire une surface, vous devrez me donner sur votre ardoise deux unités d'aire, une plus grande que l'aire de la surface et l'autre plus petite. Vous écrirez comme pour les longueurs. Par exemple, pour le dessus de votre gomme, son aire est plus grande qu'un centimètre carré et plus petite qu'un décimètre carré.*
Donner ainsi des exemples. On contrôlera avec un ordre de grandeur des dimensions des rectangles associés, au besoin on en dessinera quelques-uns sur du papier de couturière (quadrillé au cm).

Masses

En atelier "technologie", les élèves fabriqueront des sacs de sable de 1 g, 1 dag, 1 hg, 1 kg. Ces sacs seront visibles, différents exemplaires permettront de vérifier à peu près que 10 fois 1 hg, c'est la même chose que 1 kg, etc. (vérification par une balance de ménage).
Des égalités seront écrites sous forme entière ou décimale
1 g = 0,001 kg
1 g = 1/1000 kg ou 1 kg : 1000
1 kg = 1000 g etc.

Même type de questionnement que précédemment pour vérifier l'ordre de grandeur dans l'échelle du système métrique.

Volumes

Il est très important de faire voir aux enfants 1 cm3, 1 dm3, 1 m3, fait avec des armatures (baguettes de bois). Il est alors impossible de dire que 10 cm3 = 1 dm3. On voit tout de suite que c'est faux.

L'ordre de grandeur physique des volumes est beaucoup plus compliqué (voir les difficultés des maîtresses de maison pour ranger les restes dans des boîtes à mettre au réfrigérateur...).

Nota Bene : il est inutile d'essayer de remplir 1 dm3 avec 1000 cm3 : les erreurs de fabrication sont telles que l'on est obligé de traiter un autre problème, la tolérance (ou la précision) dans les fabrications en série. C'est un autre sujet, important certes, mais qu'il est prudent de traiter à part...

Jeanne BOLON
IUFM, centre de Versailles

Avril 1994

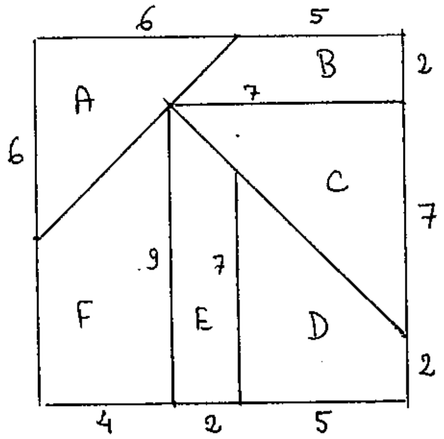
Suggestion 10 : Agrandissement d'un puzzle

Présentation
La situation de l'agrandissement d'un puzzle se trouve dans des publications sous de nombreuses formes. On joue à la fois de l'impression visuelle des objets fabriqués (forme globale, angles) et des calculs sur les longueurs, les uns servant de contrôle aux autres.

Suivant le niveau de la classe, la situation peut être utilisée pour :
- comparer les effets géométriques des opérateurs additifs et des opérateurs multiplicatifs sur les dimensions,
- faire utiliser les propriétés "scalaires" de la proportionnalité,
- introduire la fraction comme opérateur multiplicatif, opérant sur des entiers,
- donner du sens au produit de deux fractions.

Partie 1 - Les effets géométriques des opérateurs additifs et multiplicatifs
Les élèves travaillent par groupe. Ils reçoivent des morceaux d'un puzzle rectangulaire dont les pièces portent des noms (A, B, C, D, E, F) et un morceau de bristol. L'enseignant(e) dessine au tableau une représentation agrandie du puzzle complet.

Le plan de découpage du puzzle (non fourni aux élèves) est le suivant :



Le puzzle a des propriétés particulières :
- il n'y a pas le même nombre de pièces sur chacun des côtés du rectangle.
- il y a des formes qui ne sont ni des rectangles, ni des triangles rectangles, ni des carrés,
- un côté d'une pièce a même longueur que la somme de deux autres, ou un côté d'une pièce a une longueur double d'une autre.

Consigne : *Chaque équipe devra soit agrandir soit réduire le puzzle, en respectant les dimensions que je vous donnerai. Dans l'équipe, chaque élève devra faire une ou deux pièces du nouveau puzzle. Quand vous aurez fini, vous devrez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle initial.*
Groupe bleu : 4 cm sur le modèle devra mesurer 7 cm sur votre reproduction.
Groupe vert : 4 cm devra mesurer 10 cm .
Groupe marron : 4 cm devra mesurer 8 cm.

Procédures attendues
- Recours à des opérateurs additifs/soustractifs, qui déforment les figures, voire à des procédures mixtes (x2 suivi de - 1), avec éventuellement des "coups de ciseaux" pour ajuster les formes.
- Pour le groupe marron, opérateur x 2 .
- Pour le groupe vert, prendre le même nombre et ajouter sa moitié.
- Recherche de l'image de 2 par moitié de l'image de 4, de l'image de 1 par moitié de l'image de 2, puis de l'image de 5 par somme (procédures "scalaires")
Représentations associées de type correspondance :
4 -----> 7
2 ------> 3,5
1 ------> 1,75
4 + 1 -----> 7 + 1,75
5 ------> 8,75

- Suppression, à l'issue des calculs, des chiffres des centièmes, "parce qu'on ne peut les repérer au double-décimètre" (conflit mesure-calcul).

Bilan partiel
- Ajouter ou retrancher un même nombre aux dimensions agrandit ou diminue la figure, mais ça déforme. Les angles ne sont par conservés.
- Quand on multiplie par 2 ou on divise par 2, les angles sont conservés : on peut reconstituer le puzzle.
- Reconnaissance des propriétés "scalaires" de la proportionnalité (image d'un produit par un nombre image de la somme).
- Recherche de l'image de tous les nombres entiers pour les transformations 4 ---> 7 et 4 ---> 10.
- Connait-on un multiplicateur pour chaque transformation ? (réponse variable suivant le niveau des élèves).

Partie 2 - Image d'une fraction (la fabrication du puzzle est évoquée)
Consigne : *Vous devrez préparer la fabrication de puzzles. Je vous donne des transformations et vous devrez trouver un procédé qui permette de calculer les images de n'importe quel nombre entier.*
Transformations :
4 ----> 11 7 ----> 5

Procédures attendues
- Pour la transformation 4 ----> 11, utilisation de procédés scalaires pour obtenir l'image de 1 via les décimaux ; pour la transformation 7 ----> 5, image des multiples de 7.
- Passage par 1 pour les images et utilisation des propriétés des opérateurs "divisifs":

: 7 7 ----> 5 : 7
1 ----> 5/7

- Passage par la division de 1 par 7 pour donner du sens à "5 divisé par 7"

: 7
x5 1 ----> 1/7 x 5
5 ----> 5 x (1/7) ou 5/7

- Aux niveaux les plus élevés, reconnaissance de l'opérateur multiplicatif fractionnaire et calcul sur les fractions.

Bilan partiel
La division "exacte" : 7, de l'école primaire, peut être étendue aux nombres qui ne sont pas multiples de 7. Diviser par 7, c'est l'inverse de multiplier par 7.
5 : 7 = 5/7, c'est aussi 5 fois 1/7 ou 5 x (1/7)
1 : 7 = 1/7 parce que 7 x 1/7 = 1

Des exercices similaires sont faits avec d'autres transformations.

Consigne : *On avait cherché les images de tous les nombres entiers. Maintenant, vous allez chercher l'image de la fraction 3/7 dans la transformation 4 ----> 11.*

Procédures attendues
- Utilisation de procédures scalaires aboutissant à 2,75 x 3/7 ou 11/4 x 3/7, avec blocage éventuel pour les niveaux les moins élevés :

: 4 4 ----> 11 : 4
1 ----> 11/4 qui est écrit aussi

x 3/7 1 ----> 2,75 x 3/7
3/7----> 2,75 x 3/7

: 4 4 ----> 11 : 4
1 ----> 11/4
3/7----> 11/4 x 3/7

- Passage par l'image de 3 ou l'image de 1/7
4 ----> 11
1 ----> 11/4
3 -----> 33/4 soit 33 x (1/4)
3/7----> 33 x (1/28) soit 33/28
en utilisant le partage de 1/4 en 7 parties égales, on en met 28 dans l'unité, c'est 1/28.

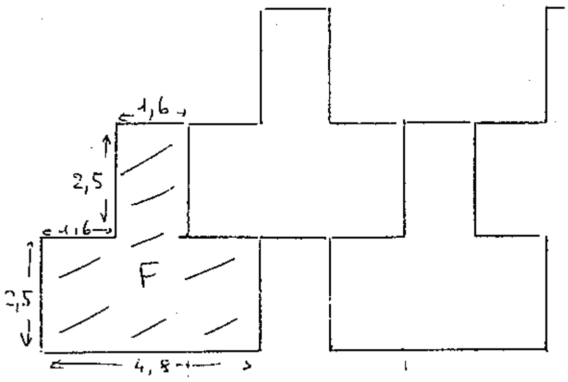
4 ----> 11
1 ----> 11/4 soit 11 x (1/4)
1/7----> 11 x (1/28)
3/7----> 33 x (1/28) soit 33/28
en utilisant le partage de 1/7 en 4 parties égales, on en met 28 dans l'unité, c'est 1/28.

- Aux niveaux les plus élevés, reconnaissance de l'opérateur multiplicatif fractionnaire et calcul sur les fractions.

Bilan partiel
- On peut diviser une fraction par un nombre entier :
1/7 : 4 = 1/28 3/7 : 4 = 3 x (7/4)
3/7 : 4 = 21/4
- "Prendre le quart de", c'est diviser par 4, c'est aussi multiplier par 1/4. (il peut être nécessaire pour certains élèves de revenir au sens des fractions sur un matériel de type de celui de la suggestion 3).

Partie 3 - Image d'un décimal (la fabrication du puzzle est évoquée, puis réalisée)

Consigne : *Nous allons réaliser un panneau décoratif pour notre classe. Ce panneau sera formé d'un ensemble d'éléments identiques à F que nous arrangerons comme le montre ce croquis fait au tableau. Chaque élève réalisera un de ces éléments en agrandissant le modèle de telle manière qu'à 1 cm du modèle corresponde: 3,5 cm sur l'élément fabriqué.*



Procédures attendues
- Conversions des décimaux en fractions décimales, et autres procédures des activités antérieures.
- Pour 2,5, décomposition additive en 2 + 0,5.
- Pour 1,6, décomposition en 1 + 0,5 + 0,1.
- Pour 4,8, décomposition en 4 + 0,5 + (3 x 0,1).
- Suppression, à l'issue des calculs, des chiffres des centièmes, "parce qu'on ne peut les repérer au double-décimètre" (conflit mesure-calcul).

Bilan
- On sait trouver l'image de n'importe quel nombre entier, fraction ou décimal.
- On sait diviser une fraction ou un décimal par un entier.
- On sait multiplier n'importe quel nombre (entier, fraction, décimal) par une fraction de type 1/n.
- Quand on trouve un nombre dans un calcul, il faut quelquefois l'arrondir au moment de dessiner.

<u>Procédures attendues</u>
- Pour la transformation 4 ----> 11, utilisation de procédés scalaires pour obtenir l'image de 1 via les décimaux ; pour la transformation 7---> 5, image des multiples de 7.
- Passage par 1 pour les images et utilisation des propriétés des opérateurs "divisifs":

7 ----> 5
1 ----> 5/7

- Passage par la division de 1 par 7 pour donner du sens à "5 divisé par 7" :

1 ----> 1/7
5 ----> 5 x (1/7) ou 5/7

- Aux niveaux les plus élevés, reconnaissance de l'opérateur multiplicatif fractionnaire et calcul sur les fractions.

Dans la troisième partie les mesures initiales sont des décimaux et le multiplicateur est décimal. Nous avons repris intégralement le dispositif décrit dans la brochure B & B. Nous avons résumé les procédures attendues et le bilan.

Cette situation est presque classique dans sa première partie : on la trouve dans des articles, dans des manuels. Mais les enseignants accepteront-ils que les rationnels désignent des longueurs (parties 2 et 3) ?

<u>2.11- Suggestion 11 : Calculer, fabriquer, mesurer</u>

Cette suggestion (recto, présentée ci-après) est une reprise, très légèrement modifiée, d'une situation de B & B (module 9, p. 160 à 169).

Il s'agit de fournir aux élèves une occasion de distinguer :
- les valeurs calculées que l'on arrondit à une précision déterminée par les instruments de fabrication de l'objet, pour pouvoir effectivement fabriquer l'objet,
- les valeurs obtenues par mesure effective des grandeurs,
- les valeurs calculées à partir de mesures effectives,
- les valeurs calculées à partir de résultats de calculs.

Le plan de B & B est conservé, toutefois nous avons pris une figure différente de celle proposée dans la brochure, parce qu'elle faisait intervenir un dessin avec représentation en perspective, ce qui nous a paru gênant pour l'interprétation de traits traduisant la profondeur de champ. Les procédures attendues ont été résumées ainsi que le bilan et l'activité de renforcement.

Nous disposons ici d'une situation où l'approximation doit être contrôlée, dans un contexte d'agrandissement que l'on rencontre fréquemment dans les manuels scolaires. Les arrondis sont ici des outils pour résoudre des problèmes. On retrouve une préoccupation déjà présente dans la suggestion 2 à propos des grandeurs familières, la situation étant probablement plus délicate, puisqu'elle mêle mesures et calculs.

Suggestion 11 : Calculer, fabriquer, mesurer

Présentation
Les mathématiques ne sont pas réservées aux les professionnels des mathématiques, elles sont faites aussi pour servir ailleurs qu'en mathématiques.

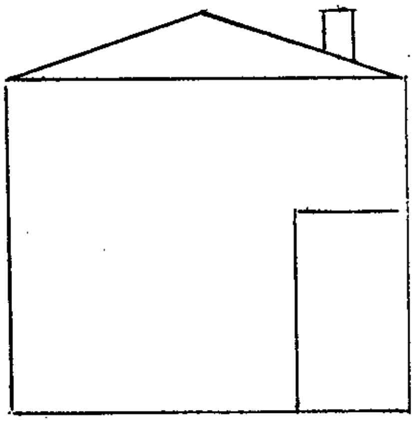
En mathématiques, il est fréquent d'utiliser la "réalité" pour introduire de nouveaux concepts. Mais le passage inverse, des mathématiques à la réalité, reste, en général, à la charge des autres disciplines, au risque de masquer les conflits entre calcul et mesure.

Le thème de l'agrandissement et la réduction de figures planes est favorable à l'étude complète des problèmes théoriques et pratiques que pose la fabrication d'un objet agrandi ou réduit. On prépare alors, de très loin, les calculs d'approximation qui seront faits beaucoup plus tard en mathématiques (convergences de suites, par exemple) et en physique.

Ici, il ne s'agit pas d'aborder une quelconque théorie de l'approximation, mais d'en poser les principes de bases, à savoir, distinguer :
- les valeurs calculées que l'on arrondit à une précision déterminée par les instruments de fabrication de l'objet, pour pouvoir effectivement fabriquer l'objet,
- les valeurs obtenues par mesure effective des grandeurs,
- les valeurs calculées à partir de mesures effectives,
- les valeurs calculées à partir de résultats de calculs.

Cette fiche suppose que les élèves aient déjà pratiqué des agrandissements ou réductions de figures planes.

Dispositif
L'enseignant(e) affiche au tableau le dessin d'une maison. Elle fait énumérer les parties qu'on peut reconnaître : cheminée, porte, etc. Elle marque les dimensions de ces éléments au tableau.



hauteur de la porte : 3 cm
largeur de la porte : 1,7 cm
grande hauteur de la cheminée : 0,8 cm
petite hauteur de la cheminée : 0,7 cm
côté vertical de la maison : 5 cm
largeur de la maison : 6 cm
pente du toit sans cheminée : 3,2 cm

Puis elle affiche à côté une reproduction plus grande de ce modèle (agrandi 1,5 fois).

Consigne : *Vous allez travailler en groupes. Chaque groupe me demandera par écrit la mesure qu'il souhaite sur l'agrandissement. Puis, à l'aide de cette mesure, vous prévoirez, par le calcul toutes les mesures de cette reproduction. Vous viendrez ensuite vérifier, avec votre double-décimètre, si les résultats que vous trouvez sont corrects et identiques aux mesures de l'agrandissement.*
L'enseignant(e) fournit l'information correspondant au calcul (x1,5) et non à la mesure sur l'agrandissement.

Procédures attendues
- Utiliser un opérateur additif.
- Partir des nombres entiers, prendre le nombre et ajouter sa moitié, ou passer par l'image de 1.
- Partir d'une mesure décimale, convertir en millimètres, passer par l'image de 1.
- Partir d'une mesure décimale, convertir en dixièmes, calculer l'image d'un dixième.
- Pour les élèves de niveaux plus élevés, utiliser le multiplicateur fractionnaire.

Bilan
- On peut trouver 1,275 cm dans un calcul, mais pas dans une mesure ; de même pour 7/3.
- Il vaut mieux prendre 1,275 cm comme valeur plutôt que 1,28, si on doit continuer le calcul.
- Dans les tableaux de nombres, les élèves inscrivent VMD quand ils ont pris une valeur par mesure directe.
- Si on calcule à partir d'une valeur arrondie, on le mentionne dans le tableau par un VA. On peut remplacer ainsi 2,39, valeur exacte, par 2,4, valeur approchée.
- Quand on agrandit, les erreurs sont agrandies aussi.

Renforcement
Consigne : *Une autre reproduction a été faite. J'ai mesuré sur la reproduction agrandie la porte et le côté vertical. Est-ce la même correspondance ?*
3 ---> 7,1 (VMD)
6 ----> 13,9 (VMD)

2.12- Suggestion 12 : Fonction numérique et valeur approchée

Cette suggestion (recto-verso, présentée ci-après) est une adaptation de situations de D & P (chapitre V de la brochure).

La première partie a été ajoutée par rapport à la situation D & P : c'est une situation de rappel de la proportionnalité, sur une graduation, entre distance numérique et distance géométrique, dans un contexte d'arrondis et de partage de segments. En effet, nous savons que les activités proposées par D & P supposent une bonne maîtrise de l'usage des axes d'un graphique.

La deuxième partie de notre fiche reprend le paragraphe V.1 de la brochure (p. 105 à 120). Nous n'avons pas fourni l'analyse a priori de la situation de construction de rectangles dont une dimension est fixée (p. 105 à 111). Nous avons repris la consigne formulée p. 111, mais nous avons restreint les différents cas à étudier (quatre au lieu de six dans la brochure). Nous avons résumé l'analyse de la tâche en indiquant quelques procédures attendues. Pour les graphiques correspondants, nous avons fourni une consigne différente de celle de la brochure D & P.

Consigne de la brochure D & P :

> Travail individuel
> Cas de l'aire
> Consignes : *1. Représenter graphiquement tous les couples (x, y) trouvés par l'équipe pour la valeur de a donnée ; x est le mesure en cm de l'autre dimension du rectangle, y est la mesure de l'aire en cm².*
> *2. Y a-t-il dans la famille un rectangle d'aire 20 cm², 25 cm², etc... ?*

Nos consignes :

> Consigne : *Individuellement, représentez sur un graphique l'aire des rectangles de votre équipe, en fonction de la deuxième dimension. Comme échelle, vous prendrez pour la deuxième dimension 1 cm pour 1 cm ; pour l'aire, vous prendrez 1 cm pour 5 cm².*
> Une fois les graphiques remplis, on les affiche. Des points ne paraissent pas alignés : les élèves sont invités à vérifier leur calcul.
> Consigne : *Pourrait-on fabriquer un rectangle de 20 cm², de 25 cm² ?*

Nous avons fait suivre ces consignes de procédures attendues, de l'évocation rapide d'un travail analogue sur le périmètre, puis du bilan de cette partie.

La troisième partie fait étudier les rectangles de périmètre donné : calcul de l'aire (p.21 à 129). Pour la première activité, nous avons repris le dispositif de la brochure, en nous restreignant à quatre cas différents (huit dans la brochure). L'activité suivante a été reprise telle quelle. Nous avons résumé l'analyse des tâches par une liste de procédures attendues.

La quatrième partie fait étudier les rectangles d'aire donnée (p. 129 à 139). Nous avons repris le dispositif de la brochure tel quel, avec des modifications très légères dans la formulation de la consigne.

Jeanne BOLON
IUFM, centre de Versailles

Avril 1994

Suggestion 12 : Fonction numérique et valeur approchée

Présentation

L'expression "fonctions numériques" recouvre une grande variété de types de problèmes mathématiques, qui réclament plus ou moins d'abstraction chez les élèves.
A l'école élémentaire, on commence à utiliser des grandeurs variables qui se correspondent : quantité et prix, nombre de parts et valeur de la part pour un total fixé, etc. Des tableaux y sont fréquemment associés, ils facilitent d'ailleurs la mise en évidence des propriétés de la proportionnalité. Les graphiques cartésiens sont moins fréquents, bien qu'ils facilitent la détection des situations de proportionnalité.

Dans l'activité ci-après, les graphiques ne servent pas à mettre en valeur les propriétés de la proportionnalité : ce sont des outils qui facilitent la recherche de la valeur approchée de la solution d'une équation.

Cette fiche suppose que les élèves aient déjà fait des graphiques, qu'ils aient associé des fractions à des longueurs et qu'ils aient travaillé sur l'aire et le périmètre de rectangles.

Partie 1- Graduer un axe (si nécessaire)

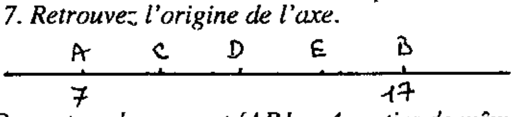
Consigne : *Le nombre d'or est très connu des architectes, on le retrouve dans la nature.*

φ = 1,61803389....

On prend les arrondis de φ dans D3, les décimaux à 3 chiffres après la virgule, D4, les décimaux à 4 chiffres après la virgule, D5, D6, D7, etc.
d3 = 1,618
d4 = 1,618
d5 = 1,61803
d6 = 1,618034 etc.
Représentez sur une demi-droite les nombres d3, d4, d5, d6, etc. avec l'échelle suivante :
une distance de 1 dans les nombres est représentée par 20 cm sur la demi-droite.

Bilan partiel
Quand on gradue un axe, il ne faut pas confondre les distances des nombres qui graduent la droite avec les distances entre points géométriques (en centimètres).

Consigne : *Sur un axe gradué, deux points A et B sont à 5 cm l'un de l'autre. A correspond à 7 et B à 17. Retrouvez l'origine de l'axe.*



On partage le segment [AB] en 4 parties de même longueur. C, D et E sont les points de partage. A quels nombres correspondent-ils ?

Même question si l'on partage le segment [AB] en 3 parties de même longueur.

Bilan partiel
- La graduation n'est pas forcément d'1 cm pour une distance de 1.
- Pour partager un segment, on peut partir des distances sur le dessin, ou des nombres qui graduent les extrémités.

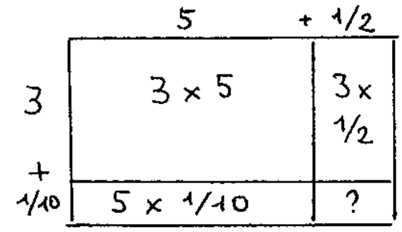
Partie 2- Aires et périmètres de rectangles dont une dimension est fixée

Les élèves sont par équipe. Consigne : *Dans chaque équipe, vous devrez vous partager le travail Chacun dessinera 4 ou 5 rectangles dont une des dimensions vous est donnée en centimètres. Tous les rectangles de l'équipe doivent être différents. Pour chacun des rectangles, vous calculerez le périmètre en cm et l'aire en cm2. Vous organiserez les résultats dans un tableau.*

Valeurs pour la dimension en cm :

5 | 3 + 1/2 | 2 + 3/4 | 4 + 6/10

Procédures attendues
- Choix de la deuxième dimension entière ou somme d'un entier et d'un demi, pour faciliter les calculs d'aire et de périmètre.
- Deuxième dimension utilisant une fraction de même dénominateur que celle de la première dimension.
- Calcul de l'aire par découpage en quatre morceaux, une partie "carreaux entiers", deux parties "dimension entière par dimension fractionnaire", une partie "fraction par fraction".



Pour le petit morceau du coin, l'évaluation de l'aire se fait en pavant le carreau unité (cm2) par des petits rectangles de dimension 1/2 sur 1/10 : on en mettrait 20, l'aire de chacun est 1/20.
- Conversion en nombres décimaux et calculs à la main ou à la calculatrice.

Consigne : *Individuellement, représentez sur un graphique l'aire des rectangles de votre équipe, en fonction de la deuxième dimension. Comme échelle, vous prendrez pour la deuxième dimension 1 cm pour 1 cm ; pour l'aire, vous prendrez 1 cm pour 5 cm2.*

Une fois les graphiques remplis, on les affiche. Des points ne paraissent pas alignés : les élèves sont invités à vérifier leur calcul.
Consigne : *Pourrait-on fabriquer un rectangle de 20 cm2, de 25 cm2 ?*

Procédures attendues
- Lecture du graphique pour trouver des solutions approchées.
- Pour les élèves des niveaux les plus élevés, résolution de l'équation a x = 20 ou a x = 25

Consigne : *Idem pour le graphique avec le périmètre.*
Pourrait-on trouver un rectangle de périmètre 25 cm ? 32 cm ?

Procédures attendues
- Lecture du graphique pour trouver des solutions approchées.
- Résolution de l'équation a + x = 25 ou a + x = 32

Bilan partiel
Tous les graphiques d'aire sont superposés en un seul.
Tous les graphiques de périmètres sont superposés en un seul.
Les points sont alignés, mais pas de le même manière (droites passant par l'origine, droites parallèles entre elles).

Partie 3- Rectangles de périmètre donné, calcul de l'aire
Les élèves sont par équipe. Consigne : *Dans chaque équipe, vous devrez vous partager le travail Chacun dessinera 4 ou 5 rectangles dont le périmètre vous est donné en centimètres. Tous les rectangles de l'équipe doivent être différents. Pour chacun des rectangles, vous inscrirez les dimensions a et b de chaque rectangle dans un tableau. Vous ferez ensuite un graphique.*
Valeurs pour le périmètre en cm, un par équipe :
10 15 8 5

Procédures attendues
- Calcul du demi-périmètre.
- Détermination d'une solution entière ou avec des demis, puis procédé de compensation (1/10 de plus pour a, 1/10 de moins pour b)
- Calcul sur les fractions simples (ce qui manque pour aller à ...).

Bilan partiel
- Les points sont alignés sur le graphique. On peut trouver d'autres valeurs sur le graphique (avec des demis).

Consigne : *j'ai repris le tableau de l'équipe qui avait pour périmètre 10 cm. Individuellement, calculez l'aire de chaque rectangle de cette équipe. Vous représenterez vos résultats sur un graphique. Vous prendrez comme échelle, pour a, 1 cm pour 1 cm ; pour l'aire, 1 cm pour 1 cm2*

Une fois le travail fait, l'enseignant invite à faire des calculs intermédiaires pour préciser le tracé de la courbe.

Procédures attendues
- Utilisation de demis.
- Utilisation de dixièmes, centièmes, etc.
- Calculs directs dans les décimaux.

Bilan partiel
- Quand le périmètre est le même, l'aire n'est pas toujours la même.
- Plus le rectangle se rapproche d'un carré, plus son aire est grande.

Partie 4- Rectangles d'aire donnée
Les élèves disposent de papier quadrillé au demi-centimètre, gradué en prenant 5 carreaux pour 1 unité, ou de papier millimétré.
Consigne : *Chaque point du quadrillage correspond à deux nombres a et b. Les nombres a et b désignent les dimensions d'un rectangle dont vous calculerez l'aire.*
- Si l'aire du rectangle est supérieure à 24 cm2, vous colorierez le point en rouge sur le quadrillage.
- Si l'aire du rectangle est inférieure à 24 cm2, vous colorierez le point en bleu sur le quadrillage.
- Si l'aire du rectangle est égale à 24 cm2, vous colorierez le point en noir sur le quadrillage.

Procédures attendues
- Après une période désordonnée où les élèves choisissent des points au hasard, le coloriage se structure par ligne horizontale ou verticale, à partir d'un point déjà coloré à coordonnées entières.
- Fixer une des coordonnées et faire varier l'autre en recherchant le point noir par encadrement.
- Choisir le milieu du segment joignant deux points noirs. 6 x 4 = 24 ; 8 x 3 = 24
On essaie 7 x (3+1/2)
- Compenser à partir d'un point noir 6 x 4 = 24
(4 + 1/2) x (5 + 1/2) trop grand
(4 + 1/2) x (5 + 1/4) trop petit
(4 + 1/2) x (5 + 1/3) = 24
- Fabriquer de nouveaux rectangles d'aire 24 à partir d'un rectangle d'aire 24, par découpage.
- Utiliser des nombres décimaux.

Bilan
- Sur chaque verticale, il y a un seul point noir. De même sur chaque horizontale.
Le nombre cherché, par exemple pour a = 7 vérifie 7 x b = 24, c'est 24/7.
24/7 x 7 = 24
- On peut avoir des approximations par des nombres décimaux.

Renforcement
Consigne : *Parmi les rectangles d'aire 24, y a-t-il un carré ?*

Consigne de la brochure D & P :

Vous tracez des axes et vous les graduez (1 gros carreau pour une unité). Chaque point (x, y) du quadrillage représente un rectangle de dimensions x cm et y cm. Vous allez colorier tous les points du quadrillage avec la consigne suivante :

. Si l'aire du rectangle est supérieure à 24 cm², vous marquez un point rouge.

. Si l'aire du rectangle est inférieure à 24 cm², vous marquez un point bleu.

. Si l'aire du rectangle est égale à 24 cm², vous marquez un point noir.

En résumé — *si $A > 24$ cm² point rouge*

si $A < 24$ cm² point bleu

si $A = 24$ cm² point noir

Notre consigne :

Consigne : *Chaque point du quadrillage correspond à deux nombres a et b. Les nombres a et b désignent les dimensions d'un rectangle dont vous calculerez l'aire.*

- Si l'aire du rectangle est supérieure à 24 cm², vous colorierez le point en rouge sur le quadrillage.

- Si l'aire du rectangle est inférieure à 24 cm², vous colorierez le point en bleu sur le quadrillage.

- Si l'aire du rectangle est égale à 24 cm², vous colorierez le point en noir sur le quadrillage

Nous avons présenté ensuite les procédures attendues de manière résumée. Nous avons terminé sur un bilan et la recherche des dimensions du carré d'aire 24 cm².

L'ensemble montre que les rationnels sont insuffisants : ils permettent tout au plus de fournir des encadrements de la solution au problème numérique posé. Les enseignants sont-ils prêts à recourir à des représentations graphiques comme support d'une résolution de problème ?

2.13- Une réécriture variable

Le total de douze suggestions se répartit en :
- sept suggestions inspirées par les progressions de référence (B & B, D & P),
- cinq suggestions complémentaires.

Pour les suggestions inspirées par les progressions de référence, nous avons modifié de façon notable les textes initiaux, mais à des degrés divers : la suggestion 7 est la plus éloignée de la rédaction originelle, les suggestions 4, 5, 11 et 12 les plus proches.

Il n'y a pas de raison de penser que les enseignants associés distingueront parmi les douze suggestions celles inspirées des progressions de référence, sauf les enseignants qui auraient étudié précédemment les deux brochures de référence. En effet, les thèmes traités sont voisins (sauf la suggestion 9 qui est la seule à faire référence exclusivement au monde physique), et la présentation textuelle est stable (sauf celle de la suggestion 1 faite d'exercices très courts).

Nous pouvons résumer notre travail de réécriture par les caractéristiques suivantes :
- nous avons restreint le nombre de cas différents à traiter dans la classe pour que les comptes-rendus de travaux de groupes soient moins longs,

- les suggestions ne comprennent pas d'analyse didactique : la présentation de la suggestion, la description des procédures attendues et les bilans partiels en sont les seules traces,
- nous avons respecté les signifiants utilisés dans les situations (systèmes d'écritures, graphiques, schémas) ainsi que les valeurs numériques ou dessins, sauf mention spéciale,
- nous avons parfois tronqué des situations, mais nous n'avons pas bouleversé l'ordre des activités proposées dans les brochures de référence, sauf mention spéciale,
- l'écriture est beaucoup plus dense que dans les documents originaux.

Les documents que nous fournissons ne sont pas faciles à lire :
- les référents didactiques peuvent être inconnus des lecteurs, les situations présentées peuvent leur paraître différentes des pratiques courantes, voire être en contradiction avec elles,
- l'organisation rédactionnelle des suggestions suppose la reconstitution d'informations.

Néanmoins nous pensons que nos suggestions sont plus faciles d'emploi que les brochures de référence :
- les justifications théoriques de la brochure D & P, indispensables pour une bonne reproductibilité didactique, ne sont lisibles que par des personnes formées en didactique ; ce n'est pas le cas de la brochure B & B, plus proche, dans sa rédaction, des instruments habituels de la classe, les études proprement didactiques étant présentées en fin de brochure,
- la présentation des suggestions en douze textes quasiment indépendants facilite une lecture-survol et rend légitime une reprise limitée, à la différence des brochures de référence qui proposent des suites de séquences ordonnées.

4. Compatibilité des suggestions avec les exigences figurant dans les textes officiels

Nous allons maintenant examiner chacune des suggestions en fonction des exigences requises par les textes officiels en vigueur au moment de la recherche. Nous les caractériserons selon les critères suivants :
- les situations proposées peuvent être résolues à l'aide des outils inscrits au programme du niveau considéré, dans le cadre d'activités de type "résolution de problème", ce que nous avons appelé "recherche",
- le type de problème figure explicitement dans les objectifs du niveau considéré, ce que nous avons qualifié "d'exigible".

Pour faire ce travail d'analyse, nous avons pris appui sur l'étude des textes officiels faite au chapitre II.

Il n'a pas toujours été possible de classer avec certitude les situations proposées dans les suggestions : nous en donnerons des exemples.

Nous avons rassemblé ces éléments d'analyse en un tableau.

Suggestion n°	Titre	Recherche	Exigible
1	Calcul approché :		
	sur entiers	CE2	CM2
	sur décimaux	CM1	6°
2	Grandeurs familières et calculatrice :		
	problèmes additifs et écarts	CM1	6°
	problèmes multiplicatifs et arrondis	CM2	6° ?
	maquettes et arrondis	CM1	6° ?
3	Fractionnement de l'unité, graduation de la demi-droite	CM1	5°
4	Liaison entre ordre et addition	5°	4°
5	Liaison entre fraction et division euclidienne	CM2 ?	6° ?
6	Problèmes additifs/soustractifs :		
	sur entiers	CE2	CM2
	sur décimaux	CM1	CM2
	sur fractions	CM2	5°
7	Problèmes multiplicatifs/"divisifs" :		
	sur entiers	CM1	CM2, pour :
	sur décimaux	CM2	6° ?
	sur fractions	6°	5° ?
8	Grandeurs et unités de référence	CM2	?
9	Ordre de grandeur physique	CM1	6° ?
10	Agrandissement du puzzle :		
	partie 1, entiers ----> décimaux	CM2	6°
	partie 2, entiers ----> fractions	6°	4°
	partie 3, décimaux ----> décimaux	6°	5° ?
11	Calculer, fabriquer, mesurer	CM2	?
12	Fonction numérique et valeur approchée	6°	?

Explicitons les doutes que nous avons exprimés avec des points d'interrogation dans le tableau.

Les grandeurs familières (suggestion 2) peuvent être mises en relation avec le préambule des travaux numériques de sixième :

> La résolution de problèmes concrets constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme... Outre leur intérêt propre, ces problèmes doivent permettre aux élèves... d'associer à une situation concrète un travail numérique et de mieux saisir le sens des opérations et des équations figurant au programme.

Bien que l'arrondi fasse partie des compétences exigibles, nous ne sommes pas sûre que leur réinvestissement dans la résolution de problèmes soit également exigible, raison pour laquelle nous avons mis un point d'interrogation.

La liaison entre fraction et division euclidienne (suggestion 5) est visiblement amorcée dans les textes officiels de sixième. Nous lisons en effet dans la partie qui traite des compétences exigibles pour le quotient de deux décimaux :

> Avec une calculatrice : donner des approximations décimales du produit d'un décimal par a/b.

Dans notre présentation de la suggestion, nous avons inclus la mesure d'écarts et l'évaluation de la qualité de l'approximation, considérations qui ne figurent pas dans les textes de sixième et cinquième, ce qui explique notre point d'interrogation.

Dans la suggestion 7, nous avons voulu proposer une activité de structuration des savoirs arithmétiques. Elle correspond, comme pour la suggestion 2, aux "sens des opérations". A ce titre nous pouvons la considérer comme exigible. Cependant la classification que nous avons proposée, par catégorie d'environnement de problèmes, ne figure ni dans les textes officiels de l'école élémentaire ni dans ceux de collège. Nous serions tentée de dire que la réflexion sur le sens des opérations est inscrite dans la liste des activités obligatoires, mais qu'elles pourraient être réalisées avec d'autres activités que les nôtres.

La suggestion 8 examine d'un point de vue mathématique les rapports entre l'unité de mesure comme étalon, le nombre et l'objet physique. De même, la suggestion 11 crée un pont entre les approches mathématique, physique et technologique. On ne trouve pas de telles exigences dans les textes officiels.

La suggestion 9 trouverait sa place dans un enseignement technologique. Les programmes de technologie de sixième ne fournissent aucune indication sur les performances exigibles en matière d'ordre de grandeur physique.

Pour la suggestion 10, les outils de résolution ne sont pas du même niveau selon les activités proposées. Si l'usage des propriétés de linéarité suffit pour la partie 1, la partie 2 suppose un traitement des rationnels en liaison avec la proportionnalité, d'où la mention du niveau de quatrième. En revanche, la dernière partie, qui suppose de l'aisance dans l'utilisation de quotients de décimaux, pourrait être inscrite en cinquième, bien que l'activité correspondante ne soit pas expressément décrite dans la liste des compétences exigibles.

La suggestion 12 ne semble pas faire partie des exigences du collège en tant qu'activité synthétique : elle met pourtant en jeu des notions qui, chacune, sont inscrites au programme du collège : périmètre et aire d'un rectangle, graphiques, approximations décimales du produit d'un décimal par a/b (a et b entiers). On peut la considérer, au moins, comme une activité de recherche.

Nous allons présenter maintenant ces mêmes données sous une autre forme pour mettre en évidence les emplois compatibles avec les textes officiels à l'école élémentaire d'une part, et au collège d'autre part. Nous inscrivons dans le tableau "Oui", lorsque le thème est inscrit explicitement dans les programmes du cycle 3 et habituellement traité au niveau considéré (par référence aux manuels). Nous inscrivons "Recherche" quand les outils nécessaires à la résolution sont enseignés au niveau considéré. Dans les autres cas, nous inscrivons "Non".

Suggestion n°	Titre	CM1	CM2
1	Calcul approché :		
	sur entiers	Oui	Oui
	sur décimaux	Recherche	Recherche
2	Grandeurs familières et calculatrice :		
	problèmes additifs et écarts	Recherche	Oui
	problèmes multiplicatifs et arrondis	Non	Recherche
	maquettes et arrondis	Recherche	Recherche
3	Fractionnement de l'unité, graduation de la demi-droite	Recherche	Recherche
4	Liaison entre ordre et addition	Recherche	Recherche
5	Liaison entre fraction et division euclidienne	Non	Non
6	Problèmes additifs/soustractifs :		
	sur entiers	Recherche	Oui
	sur décimaux	Recherche	Recherche
	sur fractions	Non	Recherche
7	Problèmes multiplicatifs/"divisifs" :		
	sur entiers	Recherche	Oui pour div.
	sur décimaux	Non	Recherche
	sur fractions	Non	Non
8	Grandeurs et unités de référence	Non	Recherche
9	Ordre de grandeur physique	Recherche	Recherche
10	Agrandissement du puzzle :		
	partie 1, entiers ----> décimaux	Non	Recherche
	partie 2, entiers ----> fractions	Non	Non
	partie 3, décimaux ----> décimaux	Non	Non
11	Calculer, fabriquer, mesurer	Non	Recherche
12	Fonction numérique et valeur approchée	Non	Non

Compatibilité des suggestions avec les exigences des textes officiels pour l'école primaire

Nous voyons dans ce tableau que bien peu de suggestions rentrent dans les travaux habituels de ces niveaux. En revanche, beaucoup d'exercices peuvent être introduits comme recherche.

Nous faisons un tableau analogue pour le collège.

Suggestion n°	Titre	Sixième	Cinquième
1	Calcul approché :		
	sur entiers	Oui	Oui
	sur décimaux	Oui	Oui
2	Grandeurs familières et calculatrice :		
	problèmes additifs et écarts	Oui	Oui
	problèmes multiplicatifs et arrondis	Oui ?	Oui ?
	maquettes et arrondis	Oui ?	Oui ?
3	Fractionnement de l'unité, graduation de la demi-droite	Recherche	Recherche
4	Liaison entre ordre et addition	Recherche	Recherche
5	Liaison entre fraction et division euclidienne	Oui ?	Oui
6	Problèmes additifs/soustractifs :		
	sur entiers	Oui ?	Oui ?
	sur décimaux	Oui ?	Oui ?
	sur fractions	Recherche	Oui ?
7	Problèmes multiplicatifs/"divisifs" :		
	sur entiers	Oui ?	Oui ?
	sur décimaux	Oui ?	Oui ?
	sur fractions	Recherche	Oui
8	Grandeurs et unités de référence	Recherche	Recherche
9	Ordre de grandeur physique	?	?
10	Agrandissement du puzzle :		
	partie 1, entiers ----> décimaux	Oui	Oui
	partie 2, entiers ----> fractions	Recherche	Oui
	partie 3, décimaux ----> décimaux	Recherche	Oui
11	Calculer, fabriquer, mesurer	Recherche	Recherche
12	Fonction numérique et valeur approchée	Recherche	Recherche

Compatibilité des suggestions avec les exigences des textes officiels pour le collège

Nos suggestions paraissent dans leur quasi totalité compatibles avec les textes officiels, mais leur statut, exigible ou non, n'est pas facile à déterminer. Face à des classes difficiles, les enseignants peuvent être conduits à considérer les suggestions fournies comme hors sujet. Par ailleurs, les horaires de sixième sont restreints (3 heures par semaine), ce qui limite la possibilité de faire des exercices de recherche : ils sont souvent repoussés à la fin de l'année une fois terminé l'essentiel du programme.

5. Comparaison avec les exercices proposés dans les évaluations de la direction de l'évaluation et de la prospective

La direction de l'évaluation et de la prospective du Ministère de l'éducation nationale propose chaque année une évaluation des élèves en début de sixième. De plus, les enseignants de sixième et cinquième ont reçu en 1994 des cahiers d'aide à l'évaluation en ce qui concerne la proportionnalité, thème relié au nôtre. Nous disposons ainsi d'exemples de ce que les experts du Ministère considèrent comme important dans l'enseignement mathématique sur l'enseignement des décimaux.

Examinons tout d'abord les tests proposés à l'entrée de la sixième dans les dernières années. Nous distinguons les catégories d'énoncés suivantes, à propos des décimaux :
1- énoncés évoquant des grandeurs : masses, capacités, prix, longueurs, aires,
2- calculs formels, décontextualisés, sans rattachement à une résolution de problème,
3- utilisation de schémas, graphiques, tableaux, demi-droites numériques,
4- estimation de mesures de grandeurs physiques familières : diamètre d'une roue de vélo, masse d'un œuf, etc.,
5- estimation "mathématique" : évaluation d'un ordre de grandeur d'un nombre exprimé "algébriquement", par exemple 72 x 1,9.

En 1991 :
9 exercices de calcul formel,
1 estimation "physique".

En 1992 :
2 énoncés dans le contexte de longueurs et prix,
8 exercices de calcul formel,
1 estimation "physique".

En 1993 :
4 énoncés dans le contexte de longueurs et prix,
7 exercices de calcul formel,
1 estimation "physique".

En 1994 :
4 énoncés dans le contexte de longueurs, prix, masses,
6 exercices de calcul formel,
1 graduation à compléter, 1 lecture de tableau
1 calcul d'estimation "mathématique"
1 estimation "physique".

Le calcul formel sur les décimaux est chaque fois majoritaire, mais son importance diminue d'année en année, au profit d'énoncés où les décimaux sont "contextualisés". Les énoncés de 1994 sont beaucoup plus variés que ceux des années précédentes. Notre souci de contextualisation est donc partagé par les experts du ministère, mais la proportion d'exercices contextualisés dans l'évaluation ministérielle est beaucoup plus faible que la nôtre.

Remarquons la permanence du thème de l'estimation physique : notre suggestion 9 en traite également.

Un exercice de calcul approché apparaît pour la première fois en 1994. Notre suggestion 1 en traite également.

Notons l'apparition récente de formes symboliques comme la graduation d'une demi-droite et le tableau : nous en faisons un usage beaucoup plus systématique (suggestions 1, 3, 4, 5, 10, 11 et 12).

Nous pouvons souligner que, depuis la mise en place des évaluations de début de sixième, aucun n'exercice n'a porté sur l'utilisation de la calculatrice. Notre suggestion 2 se situe donc en marge des préoccupations officielles.

Pour les classes primaires, certaines de nos suggestions ne correspondent pas à ce qui est valorisé par les experts du ministère : suggestions 2, 6, 7, 8. Nous trouvons ici la confirmation de la conclusion que nous donnions plus haut.

Pour ce qui est de l'enseignement secondaire, nous avons examiné les documents d'aide à l'évaluation rédigés pour le cycle d'observation sous l'égide du ministère de l'Éducation nationale (1994) [8].

La brochure d'aide à l'évaluation réunit des exercices qui ont été sélectionnés dans des épreuves utilisées lors d'évaluations officielles du Ministère ou par l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP) : elle comprend 55 fiches consacrées à l'enseignement de la proportionnalité. Nous analyserons les 34 fiches faisant intervenir des décimaux ou des rationnels soit dans l'énoncé, soit comme résultat attendu.

Les énoncés de ces 34 fiches sont dans leur majorité contextualisés par des grandeurs telles que prix, masses, longueurs, aires, durées. Les rationnels, quand ils ne représentent pas des pourcentages ou des échelles, désignent des fractions d'aires de disques ou des proportions (exercices de représentations de données) sur lesquelles aucun travail additif n'est fait. Nos suggestions 3, 4, 5 et 12 sont donc hors du champ des préoccupations des experts du ministère.

Les multiplicateurs explicités sont les échelles, les vitesses moyennes et les pourcentages (rapport partie/tout, augmentation, diminution). Ce sont aussi les seuls "quotients de décimaux" qui sont calculés. Dans les exercices formels de recherche de quatrième proportionnelle, les nombres utilisés dans chaque tableau sont particuliers : un multiplicateur "s'impose", ce qui évite le calcul du "quotient de deux décimaux".

Les exercices portant sur la recherche de prix à l'unité, de prix moyens à l'unité, de graduations régulières de droite, ne mentionnent pas le multiplicateur associé à la proportionnalité sous-jacente. Il en est de même dans la recherche d'une dimension d'un rectangle connaissant son aire et l'autre dimension. L'ensemble des commentaires montre qu'au cycle d'observation les auteurs de la brochure admettent pour ces problèmes une multiplicité de méthodes de résolution : les exercices sur des échelles, les vitesses et les pourcentages constituent pour eux les seuls cas de recherche systématique du multiplicateur associé[9]. Nos suggestions 10 et 11 sont donc hors du champ des préoccupations des experts du ministère.

L'emploi de la calculatrice ne semble pas encouragé, car beaucoup de scores sont indiqués avec la mention "exercice fait sans calculatrice".

Nous confirmons ainsi la conclusion que nous donnions plus haut pour les classes de sixième et cinquième.

Pour le primaire comme pour le secondaire, nos suggestions sont pour leur majorité étrangères aux pratiques valorisées implicitement par les documents ministériels. Nous pouvons d'ores et déjà pressentir une utilisation assez faible par les enseignants associés à l'expérimentation, sauf s'ils prennent des libertés avec les textes des programmes officiels.

---

[8] Direction de l'évaluation et de la prospective & Direction des lycées et collèges (1994), *Aide à l'évaluation des élèves, Mathématiques, Cycle d'observation*, Paris: Ministère de l'Éducation nationale.

[9] Ce sont les seuls cas cités explicitement dans les textes officiels de sixième et cinquième.

Chapitre VI

L'UTILISATION DES SUGGESTIONS

Grâce à l'aide d'inspecteurs de l'éducation nationale, d'inspecteurs pédagogiques régionaux et de collègues formateurs, trente-deux collègues, contactés en juin 1994, ont accepté d'être associés à l'expérimentation.

Les lieux d'exercice sont très différenciés : la quasi totalité des collègues du primaire travaille dans le département des Yvelines ; la quasi totalité des collègues du secondaire exerce dans le département de Seine-Saint-Denis.

Nous avons remis les douze suggestions aux enseignants associés à l'expérimentation à la fin de l'année scolaire 1993-94. Dans ce chapitre, nous rendons compte de l'utilisation qui a en été faite et des raisons que les enseignants en donnent.

1- Le recueil de données

Nous avons présenté au chapitre V (paragraphe 1) les choix que nous avons fait en matière de recueil de données.

Les performances des élèves ont été mesurées à partir de deux tests, l'un en septembre 1994 et l'autre en juin 1995. L'énoncé du test de septembre est un extrait de l'évaluation nationale de sixième. Le test de juin est la répétition de celui de septembre à quelques items près.[1]

Nous avons été en relation avec les enseignants durant l'année 1994-95 à plusieurs reprises :
- test de septembre 1994,
- entretiens en cours d'année (à partir de janvier 1995),
- entretiens de fin d'année (mai et juin 1995),
- test de juin 1995 et recueil de cahiers d'élèves.

Les tests nous ont servi à situer le niveau des classes les unes par rapport aux autres. En effet, l'opinion que peut avoir un enseignant sur la faisabilité d'un exercice peut dépendre du niveau de sa classe. Nous avons analysé les réponses de chaque élève et transmis à chaque enseignant les résultats individuels de sa classe ainsi qu'une description synthétique des résultats des classes de même niveau. Les tests ont donné également l'occasion de rappeler aux enseignants l'engagement qu'ils avaient pris avec nous.

[1] Voir énoncés et analyse en annexe.

Nous avons eu des entretiens avec tous les enseignants, en cours d'année ou en fin d'année. Pour certains, un seul entretien a eu lieu en fin d'année. Les entretiens ont été individuels, sauf en cours d'année pour les enseignants de CM2 de l'école n° 6 et ceux du collège n° 2 car ils travaillent en équipe.

La durée des entretiens a été variable, de vingt minutes à une heure : ce sont les enseignants qui en ont décidé. Ce sont eux, également, qui ont fixé les périodes qui leur paraissaient les plus favorables en cours d'année.

Durant les entretiens en cours d'année, les enseignants commentaient très librement leurs choix. En fin d'année, les entretiens se sont déroulés de manière semi-directive selon un plan-type. Nous leur avons demandé de fournir une appréciation globale sur la lisibilité des textes, un récapitulatif des fiches utilisées (partiellement ou non), un avis sur des emplois possibles à d'autres niveaux de la scolarité, des commentaires sur l'expérimentation. Nous avons achevé les entretiens par des renseignements d'ordre statistique (cf. questionnaire en annexe).

Niveau	En cours d'année	En fin d'année
CM1	2	8
CM2	8 (*)	7 (*)
6 °	6 (*)	8
5 °	1	1
Total	17	24

Nombre d'entretiens par niveau
(*) : un des entretiens est fait en équipe

Nous avons transcrit les entretiens avec le souci de rendre compte de l'enthousiasme, des hésitations, des silences. Nous avons ajouté la ponctuation, transformé quelques formes négatives incomplètes et supprimé des mots d'appui (*bon*, *ben*...).

Trois enseignants d'école élémentaire nous ont remis, au moment des entretiens, des études détaillées d'erreurs de leurs élèves, des analyses de déroulement et des propositions d'améliorations des scénarios.

Les enseignants nous ont prêté des cahiers d'élèves pour la durée de l'été 1995 [2]. Nous avons constaté une très grande cohérence entre ce que nous ont dit les enseignants et ce qui figurait dans les cahiers d'élèves.

2- Les caractéristiques professionnelles des enseignants, les performances de leurs élèves

Ce n'est qu'à la fin de l'année 1994-95, au cours du dernier entretien que nous avons eu avec eux, que nous leur avons demandé de nous fournir des renseignements sur leur passé professionnel. Pour huit d'entre eux, l'entretien n'a pas été possible.

2 Pour une classe de sixième, ils n'ont pas été disponibles, mais l'enseignant a fourni le cahier de textes qui comportait l'ensemble des travaux exigés des élèves.

		Ancienneté 4-7	Ancienneté 10-23	Total
École primaire	ZEP	2	2	4
	Non ZEP	2	9 (*)	11
	Sans rens.			4
Collège		1 (**)	8	9
	Sans rens.			4
Total		5	19	32

Répartition des enseignants selon l'ancienneté dans la fonction
(*) Une enseignante a 28 ans d'ancienneté
(**) Enseignant ayant travaillé, de plus, 10 ans en primaire

Les enseignants qui ont accepté de travailler sont plus nombreux pour l'école primaire (10 H, 9 F) que pour le collège (4 H, 9 F). Notons que les ZEP ne sont pas représentées dans le secteur secondaire.[3]

Certains enseignants ont abandonné l'expérimentation en cours de route : en décembre (1 en collège), en janvier (4 en école primaire) ; 3 autres enseignants de collège n'ont pu répondre à notre demande d'entretien. L'étude qualitative des suggestions a donc été faite sur une population plus restreinte : 15 enseignants pour le primaire (6 H, 9 F) et 9 pour le secondaire (3 H, 6 F).

Les contacts directs que nous avons pris en juin 1994 nous permettent de dire que les enseignants associés sont des professionnels confirmés.

D'après une étude de la direction de l'évaluation et de la prospective (DEP) du ministère de l'éducation nationale, étude faite sur une population de 192 enseignants de CE2 [4], il semble qu'à partir de 7 ans d'ancienneté, l'efficacité professionnelle s'améliore pour plafonner vers 24 ans d'ancienneté. Même s'il n'existe pas encore d'étude analogue pour les collèges, il paraît légitime d'étendre ces résultats à d'autres niveaux de la scolarité. Nous pouvons dire que les enseignants associés à notre expérimentation sont des enseignants qui savent tirer parti au mieux des conditions de leur exercice professionnel.

Les enseignants qui ont été associés à l'expérimentation constituent une population particulière. Ils sont chevronnés. La moitié d'entre eux participe à la formation initiale ou continue des enseignants : certains d'entre eux sont associés à la formation des débutants ou des personnels en poste (mission académique à la formation des personnels de l'éducation nationale [5]). D'autres travaillent en lien avec la direction de l'évaluation et de la prospective (DEP).

3 Les tests ont montré que notre population scolaire de sixième ne semble pas favorisée (par comparaison avec les réussites à l'échelle nationale).

4 BRESSOUX, P. (1994), Les effets de la formation initiale et de l'expérience professionnelle des instituteurs, *Dossier Éducation et Formations n°36,* Paris: Direction de l'Évaluation et de la Prospective.

5 MAFPEN.

		Formateur IUFM, MAFPEN, DEP	Accueil de stagiaires	Sans lien avec la formation	Total
École primaire	ZEP	***1***	***1***	***2***	***4***
	Non ZEP	***2***	***5***	***4***	***11***
	Sans rens.				4
Collège		***3***	***1***	***5***	***9***
	Sans rens.				4
Total		***6***	***7***	***11***	32

Lien avec la formation initiale ou continue des enseignants

En italique et gras, le nombre d'enseignants qui ont participé jusqu'au bout.

Les enseignants des écoles primaires associées sont plus en lien avec le secteur de la formation initiale ou continue que leurs collègues de collège.

Nous avons mesuré le *niveau des classes associées* en prenant comme indicateur le nombre d'items réussis au test de septembre. Nous avons rangé les classes de même niveau selon la médiane correspondant à chaque classe [6]. Nous avons contrôlé la stabilité de notre estimation avec le test de juin. Nous avons ainsi caractérisé les classes par leur niveau "moyen", "faible" ou "fort".

Nous avons observé que les niveaux des classes étaient très contrastés (médianes dispersées).

L'effectif d'enseignants étant réduit, nous avons regroupé les enseignants en croisant les catégories suivantes :

- primaire / secondaire,
- formateur / enseignant en lien avec la DEP ou maître temporaire d'accueil (MTA) / autre,
- classe de niveau faible / moyen / fort.

	Classe	Formateur	DEP, MTA	Autres
Primaire	Faible	1	1	2
	Moyenne	1	2	3
	Forte	2	0	3
Secondaire	Faible	0	0	2
	Moyenne	0	2	2
	Forte	2	0	1
Total : 24 enseignants		6	5	13

Nous voyons ainsi apparaître la position particulière des formateurs de collège : leurs élèves sont forts. Les enseignants "autres" ont des classes de tous niveaux.

3- Méthode d'analyse

L'analyse des données repose sur la mise en relation de différentes informations :

- les caractéristiques professionnelles des enseignants,
- les performances de leurs élèves dans le domaine de l'enseignement des décimaux,
- les arguments que les enseignants avancent pour justifier la reprise ou le rejet de certaines suggestions.

6 Voir en annexe l'analyse des réponses aux tests.

Le cadre interprétatif est inspiré des travaux de recherche sur la didactique professionnelle en milieu enseignant, en particulier ceux de Robert (1996). Nous nous centrons sur l'enseignant comme acteur professionnel. Sa pratique professionnelle est un acte social, partagé avec ses élèves : ce qu'il pense de la faisabilité d'un exercice est en référence avec les élèves qu'il a ou qu'il vient d'avoir. Nous adopterons le point de vue que l'enseignant dispose de compétences complexes, aux composantes imbriquées. Notre travail est une contribution, assez empirique, à l'élucidation de ce que Robert appelle des "lignes d'action" de l'enseignant : progression sur l'année, contenus d'un chapitre donné (description, organisation, chronologie, durée), présentation du contenu (activités individuelles ou collectives, cours, devoirs à la maison...), conduite de classe, évaluation, principes d'apprentissage...

Nous avons étudié les entretiens de fin d'année en suivant les techniques d'analyse de contenus[7]. Pour chaque suggestion, nous avons établi une grille rapportant les thèmes majeurs qui apparaissaient dans les entretiens. Nous avons mis en relation ces thèmes avec les caractéristiques professionnelles des enseignants et le niveau de leurs élèves : enseignant de l'école primaire ou du secondaire, ancienneté élevée ou faible, lien avec la formation ou non, élèves de niveau fort, moyen ou faible.

Nous avons écarté dans un premier temps les entretiens faits en cours d'année, car leur conduite avait été beaucoup plus ouverte. Nous avons cherché ensuite confirmation dans ces entretiens.

Nous avons illustré les thèmes que les enseignants ont liés aux suggestions par des extraits des entretiens. Nous avons retenu les entretiens d'enseignants qui avaient adopté des positions marquées. Nous en avons fait un montage à partir des passages les plus expressifs.

4- Les difficultés de lecture des documents

Nous avions choisi de remettre aux enseignants des suggestions brèves, sans indication de niveaux d'enseignement, avec une maquette stable. Nous avions envisagé que les suggestions soient rejetées par manque de lisibilité, au sens que nous avons donné au chapitre V. Nous avons relevé dans les entretiens ce qui en était dit. Le contenu était-il familier ? la rédaction était-elle suffisamment explicite ? Nous utilisons ici deux moments de l'entretien : au début (question 2 modifiée) et à la fin (question 5).

> Question 2 (modifiée) - Est-ce que les feuilles étaient **difficiles à lire** ?
> Question 5 - Et alors, au total, **que pensez-vous de ce que nous avons fait cette année** ?

Le clivage est assez important entre primaire (15 enseignants) et secondaire (9 enseignants).

Niveau	Utilisable immédiatement	Assez facile à réécrire	Pas familier, difficile
Primaire	7	4	4
Secondaire	1	3	5
Total	8	7	9

7 Voir LESELBAUM, N. (1987) (Ed), *Le "prof" mène l'enquête - Guide de l'enquête psycho-sociologique à l'usage des personnels de l'éducation nationale*, Paris: INRP, Rencontres pédagogiques n° 16.

Quatre enseignants du primaire disent que rentrer dans les fiches a été coûteux, qu'ils ont manqué de temps. Quatre collègues ont trouvé qu'elles étaient denses, ambitieuses, qu'il fallait les adapter. Onze personnes mentionnent dans les entretiens que les suggestions étaient faciles à lire, même s'il fallait les adapter. Deux enseignants apprécient la liberté de ne pas les utiliser.

Quatre enseignants du secondaire ont trouvé les suggestions denses, difficiles, déroutantes ; pour quatre enseignants, même quand on les lit facilement, un travail de réécriture est nécessaire. Un seul enseignant les déclare utilisables immédiatement.

Si nous suivons les catégories proposées par Duval [8], nous pouvons dire que la base de connaissances a permis à neuf collègues du primaire et à cinq collègues du secondaire de "rentrer" dans la lecture. Ils ont dû ensuite "traduire" ces textes en termes opérationnels pour leur classe. Cela correspondait à notre souhait qu'ils adaptent le matériel fourni. Pour les autres enseignants, nous ne savons pas quel facteur a été le plus important : avoir été rebutés par la densité des documents ou ne pas disposer d'une base suffisante de connaissances.

Citons quelques extraits des entretiens.

(H, maître-formateur, 12 ans d'ancienneté, école n° 8-A, ZEP, CM2, niveau moyen [9])

> - Il y a pas mal de travaux que tu proposais qui étaient pour moi naturels et obligatoires, je pense à tout ce qui est calcul mental, je pense à la présentation de l'agrandissement du puzzle, c'est une séquence de ce type-là que je varie un peu... mais que je fais souvent.(...) Il y avait des séquences que j'avais l'habitude de faire et que j'ai changées ou que je n'ai pas faites pour aller..., pour faire ça, mais ça allait dans le même sens.

Une fois le travail de réappropriation fait, la participation a été le plus souvent enthousiaste chez les enseignants du primaire. Un seul enseignant du primaire a déclaré qu'il s'est senti submergé par la documentation pédagogique et qu'il n'a pas eu le temps de faire le tri.

(H, 18 ans d'ancienneté, école n° 4, CM1-CM2, niveau moyen)

> On est tellement envahi, on a un tel choix de fiches, de documents ! Le problème pour nous qu'est-ce que l'on peut choisir, qu'est-ce qui est le mieux... et puis c'est valable partout, pas seulement en mathématiques... donc on tombe souvent sur un livre, on le feuillette, on dit ça c'est intéressant, et puis finalement on s'aperçoit que... il y a quelques trucs qui nous intéressent bien et puis, dans un autre livre, ça va être autre chose etc.... Donc on a une surabondance finalement, et à force, ça devient problématique, parce qu'on se dit toujours on va trouver quelque chose de mieux, de plus rigolo, de mieux présenté. (silence)
> Au début de l'année, je les avais lues, et puis après, ça passe très vite et on a tout un tas d'échéances qui nous arrivent et c'est vrai qu'on se perd dans une routine... on travaille comme ça. C'est vrai qu'il aurait été bon de dire : vous allez en reprendre une ; ça aurait peut-être été ça aussi dans les remarques, qu'on se soit fixé des dates-butoirs : essayons au moins de faire de la fiche 1 à la fiche ... pour telle date. Parce que c'est vrai, je l'aurais mis sur mon truc et je l'aurais fait pour cette date-là, ne serait-ce que ça, au début de l'année, ce serait une chose qui, sans nous obliger bien sûr, mais pour nous rappeler.

---

8 Voir chapitre V.

9 Le niveau est apprécié en fonction des résultats obtenus au test de septembre 1994.

Chez les enseignants du secondaire, le bilan de l'année a été nuancé : une enseignante a déclaré que, pour l'enseignement des décimaux, les suggestions n'ont pas été totalement concluantes ; une autre pense qu'elles étaient compliquées pour des élèves faibles. D'autres enseignants ont insisté sur certains aspects que les suggestions ont révélés : rapport aux problèmes concrets, calcul mental, rôle de la numération. L'un d'eux pense qu'on est sur la bonne voie pour la liaison entre recherche et classes ordinaires, un autre a regretté le manque de formation associée.

(H, lien avec DEP, 7 ans d'ancienneté, collège n° 1, sixième, niveau moyen)

JB- Sur le plan de la lisibilité des fiches, qu'est-ce que vous avez à faire comme commentaire ?

- Sur les fiches que j'ai utilisées vraiment cette année, les autres, on en parlera sous une autre forme, sur celles que j'ai utilisées cette année, moi je les ai trouvées claires, dans leur objectif... dans leur partie théorique sous-jacente, je pense que c'est assez clair, vous avez bien réussi à indiquer les objectifs des activités. Le fait d'avoir des consignes qui sont... je dirais... éventuellement utilisables telles quelles, ça peut donner une bonne illustration de ce qu'il faudrait dire pour démarrer l'activité... moi j'avoue que celles que j'ai utilisées, je me suis fortement inspiré des exemples fournis dans la fiche. Dans certains cas, j'ai repris intégralement l'intitulé des énoncés.

JB- Vous disiez tout à l'heure à propos des consignes qu'il fallait les reformuler.

- Par contre, voilà, ce qui me semble très clairement évident, il faut constamment, de toutes manières, reformuler, je dirais, le... la consigne... de façon à... s'adapter à sa pratique vraiment courante et quotidienne et à sa façon de faire fonctionner la classe. Je suis persuadé qu'effectivement une consigne qui est ici... donnée... dans toutes les classes où cette fiche a été utilisée, je pense qu'on n'a pas forcément donné la même consigne et le même point de départ... et souvent, c'est ce que je vous disais, si on donne ça comme consigne, dans certains cas il y a des élèves qui ne démarrent pas l'activité. C'est évident. (...) En tous cas ce n'est pas un problème d'adapter ce genre d'activités à sa pratique personnelle. (...) D'ailleurs on a beaucoup d'activités qu'on retrouve... exposées dans ces fiches qui sont des activités qu'on avait plus ou moins... déjà menées ou qu'on avait l'habitude de mener sous une forme un peu différente.

(F, 20 ans d'ancienneté, collège n° 3-A, sixième de soutien, niveau moyen)

- Je trouve que chaque fiche était un peu trop dense. J'aurais préféré que... ce soit peut-être, c'est peut-être trop demander, mais cadrer pour un temps plus court, travail un peu plus mâché, je dirais (rires). (...) J'aurais aimé que ce soit plus clair : me dire, je vais faire telle partie du programme, qu'est-ce que je peux utiliser, avoir en gros, je ne sais pas, chapitre "Quadrilatères", en gros...

JB- Avoir des points de repère du programme.

- Avoir des points de repère utilisables soit sur les rectangles, soit sur les aires... Voyons dans ce chapitre, ah, voyons, je peux faire ça. Tandis que là, j'ai été obligée de tout lire en me disant : qu'est-ce que je peux prendre, ça, ça ne va pas tout-à-fait... Alors, finalement, je me suis dit, comme vous alliez venir, j'ai pris le taureau par les cornes, en soutien, je fais une fiche, je vois, je l'exploite. Je ne me suis pas accrochée au programme. Il y a des choses que je ne pouvais pas faire parce que je fais seulement les échelles maintenant, donc j'étais gênée.

JB- Je vois ce que vous voulez dire. Si j'avais mis : cette fiche est utilisable en CM1 comme... , en CM2 comme..., en sixième etc...

- Pour vous, mais moi j'aurais aimé en gros soit sur... soit le rectangle, soit les fractions, un chapitre qui corresponde à un chapitre du programme de sixième. En gros quand vous prenez le programme à la fin d'un livre, vous avez de grands repères, au moins que je sache, je me dise, tiens je pourrais l'utiliser là. Vite, d'un coup d'oeil, tiens, je lis ce papier, cette semaine je vais pouvoir l'appliquer ou dans les quinze jours qui suivent.

(F, 22 ans d'ancienneté, collège n°2, un groupe faible, un groupe fort)

JB- Ça n'a pas été trop lourd, le travail que je vous ai donné ?

- Ben ... si ! (rires). Il a fallu que je m'y mette et ça a été un week-end que j'avais appelé le week-end "Bolon", c'est-à-dire je me suis dit, il faut que je m'y mette, je crois qu'il faut s'y mettre sur une durée assez longue pour pouvoir étudier la fiche dans son entier, voir ce qu'on peut faire.

JB- C'est vrai qu'il y a un travail d'adaptation, elles ne sont pas directement utilisables. (Silence).

- Non, et puis c'est vrai qu'on veut aussi apporter un peu de soi dedans, on cherche pas à la prendre directement, si on prenait directement les exercices...

JB- Oui, mais c'est mieux que les élèves reconnaissent votre style, sinon il peut y avoir une rupture, et vu les élèves faibles, ça n'est peut-être pas les avantager...

- Non....

JB- Pour rentrer dedans, il a fallu retravailler. C'était lourd...

- Lourd, non. Il a fallu rentrer dans l'esprit et se remettre en question sur la façon dont on enseignait avant les nombres décimaux, parce qu'on ne faisait pas du tout sous cette approche-là. Je faisais de façon très classique.

JB- Qu'est-ce que vous pouvez dire sur la différence ?

- Moi, j'ai été déstabilisée...

JB- Parce que... qu'est-ce qui était différent ?

- Moi habituellement, je faisais ça de manière très directive, c'est vrai que le tableau avec les chiffres et les colonnes etc., donc une façon très directive. Je n'ai pas eu l'impression de faire des choses nouvelles, ils ont eu l'impression eux de faire des choses qu'ils ne connaissaient pas, et je pense que c'était mieux. C'est vrai que j'ai été déstabilisée.

(H, 23 ans d'ancienneté, formateur, collège n° 4, cinquième, niveau fort)

JB- Qu'est-ce que vous avez envie de dire ce que vous avez fait pour moi ?

- Ce que j'ai envie de vous dire, c'est peut-être par... excusez-moi l'expression, c'est peut-être par flemmardise, ce qu'il aurait fallu, c'est que vous exposiez, avant l'utilisation de ces fiches, que je ne me contente pas de lire, c'est que vous puissiez apporter vous-même davantage d'explications, qu'on parle, qu'on réfléchisse, que vous m'éclairiez sur le but de certaines fiches, qui peut-être ne m'est pas apparu.

JB- C'était un peu dur, si je puis dire, de lire seul.

- Peut-être un peu, il fallait se forcer parfois. (silence)

JB- Par rapport à une classe, vous avez fourni du temps... Vous avez le sentiment que le temps que vous m'avez consacré, ça a été... finalement... c'était inutile...

- C'était sans doute utile et ça donne envie d'aller plus loin, de faire une recherche plus approfondie de tout problème des décimaux qui, par le prof de collège sans doute, est trop souvent survolé. On critique les instits, mais nous aussi, on en fait autant. Je crois qu'il y a une formation à compléter au niveau de tout cela. On n'est pas suffisamment, à mon avis, préparé sur l'enseignement des décimaux, on ne connaît pas les réelles difficultés éprouvées par les gamins etc.

JB- C'est vrai ce que vous dites à propos des explications. Moi je m'étais fait... un petit peu... une règle de ne pas imposer un système d'explications. J'ai une opinion sur les décimaux, mais je me suis dit : si je la donne, je ne récupérerai que mes propres idées.

- Mais vous faites trop confiance aux profs, je crois. Vous croyez qu'ils ont leurs idées déjà, c'est clair, or ils ont besoin, justement, ils ont besoin des idées des chercheurs pour se faire... pour pouvoir se construire.

(H, lien avec DEP, 7 ans d'ancienneté, collège n° 1, sixième, niveau moyen)

(...) a priori, votre idée qui était d'essayer de rendre de façon très concrète et utilisable des idées... des travaux qui avaient déjà été menés depuis maintenant fort longtemps et qui n'arrivaient pas à trouver d'applications concrètes réellement chez les enseignants, semblait être une idée tout à fait passionnante. Un enseignant, moi je vois beaucoup de jeunes stagiaires en situation, [interruption par un collègue], la question qu'ils me posaient tous, c'était finalement : où trouver des supports d'activité, des documents, ce genre de choses. Ils trouvent tous que les activités que je propose sont plus intéressantes que celles qu'ils trouvent dans les livres, alors je leur dis vous n'avez qu'à aller dans les IREM, déjà, je leur dis "fouillez dans les IREM". Mais "fouillez dans les IREM", c'est facile à dire. Dans les IREM, il y a à prendre et à laisser, à trier etc. Donc, il y a deux solutions : ou on va voir les textes théoriques, on se met dedans, on comprend la moitié et, neuf fois sur dix, on ne comprend rien parce que le vocabulaire est absolument incompréhensible pour un néophyte.

Par contre, il y a quand même des exemples d'activités, en particulier dans les textes très célèbres sur les décimaux, il y a des exemples, des supports, et à partir de là, on peut voir ce qui est sous-jacent. Mais il n'existait effectivement, je dirais, de synthèse, sinon ces fiches-là. Je trouve que ces fiches sont un premier pas sur cet aspect-là. D'autre part, le deuxième challenge, c'était : est-ce qu'elles sont utilisables ou pas, est-ce qu'elles correspondent bien à un besoin dans les classes, moi je pense que l'expérience a montré que globalement plutôt oui. Je pense que si effectivement on s'inspirait plus de ce genre d'activités et on laissait un peu de côté certaines activités du manuel, à la place, on gagnerait beaucoup en efficacité auprès des élèves, j'en suis tout à fait persuadé. Le seul problème, c'est que, si on abandonnait le manuel, c'est que les enseignants, ça leur donne beaucoup de travail personnel de recherche, de mise au point etc.. Grâce à ces supports-là, on peut avoir quand même tout prêt des choses qui paraissent utilisables. Donc globalement, je trouve que c'est plutôt positif dans l'ensemble, et je suis assez content d'avoir ces fiches-là disponibles.

5- Les suggestions utilisées

Pour chacune des suggestions, nous avons demandé si elle avait été utilisée, si peu que ce soit. Nous avons fait la statistique pour les seuls enseignants dont nous avions pu recueillir les opinions. Nous avons complété avec les informations obtenues dans le courant de l'année chaque fois que nous n'avons pas pu faire d'entretien en fin d'année.

Niveau	1	2	***3***	***4***	***5***	6
8 enseignants CM1	3	0	***2***	***0***	***0***	0
7 enseignants CM2	6	4	***3***	***0***	***0***	2
8 enseignants 6°	8	6	***1***	***0***	***1***	2
1 enseignant 5°	0	0	***0***	***1***	***1***	0
Total : 24 enseignants	17	10	***6***	***1***	***2***	4

Niveau	***7***	8	9	***10***	***11***	***12***
8 enseignants CM1	***0***	0	0	***0***	***0***	***0***
7 enseignants CM2	***1***	0	0	***1***	***1***	***0***
8 enseignants 6°	***2***	0	0	***1***	***0***	***1***
1 enseignant 5°	***0***	0	0	***1***	***0***	***1***
Total : 24 enseignants	***3***	0	0	***3***	***1***	***2***

En italique et gras, les suggestions inspirées des progressions de référence (3, 4, 5, 7, 10, 11, 12)

Nous avons regardé également le nombre de suggestions que chaque enseignant avait reprises.

Nombre de suggestions	0	1	2	3	4	5	Total
Primaire	4	4	0	4	2	1	15
Secondaire	0	0	3	4	2	0	9
Total	4	4	3	8	4	1	24

Nombre de suggestions reprises par les enseignants

Il y a 4 enseignants d'école primaire qui n'ont utilisé aucune suggestion, il y a 1 seul enseignant d'école primaire qui a utilisé 5 suggestions

Compte tenu des disparités d'effectifs entre les enseignants d'école primaire et les enseignants de collège, le nombre de reprises dans les deux ordres d'enseignement nous a paru voisin.

Les suggestions sont très inégalement utilisées.

La suggestion 1 (*Le calcul approché sur les entiers et les décimaux*), que nous avions jugée a priori la plus facile, est effectivement utilisée (au moins en partie) par les deux tiers des enseignants. Les suggestions inspirées des progressions de référence sont relativement peu utilisées, à part la suggestion 3 (*Les grandeurs et les unités de référence. Fractionnement de l'unité-graduation*). Nous nous attendions à une plus grande utilisation de la suggestion 10 (*Agrandissement d'un puzzle*), au moins dans sa partie décimale, compte tenu des publications antérieures qui y faisaient référence.

Si nous rapprochons les tableaux précédents de l'analyse a priori présentée au chapitre V (p. 261 et 262), nous nous apercevons que les suggestions utilisées correspondent presque toujours à des thèmes explicitement inscrits dans les programmes et habituellement traités au niveau considéré[10]. Les *exceptions* nous posent question.

[10] Nous avons regardé des manuels.

Nous avions estimé que les suggestions 6 (*Problèmes additifs/soustractifs*) et 7 (*Problèmes multiplicatifs/"divisifs"*) étaient exigibles, au moins dès le CM2, dans le cadre du calcul sur les entiers, et au collège sur entiers et décimaux. L'utilisation reste modérée. Le contrôle de la modélisation des problèmes fait-il encore trop "primaire" ?

Nous avions donné comme indication "recherche" à l'école élémentaire et au collège pour la suggestion 3 (*Les grandeurs et les unités de référence - Fractionnement de l'unité, graduation*), car les outils nécessaires à la résolution sont enseignés au niveau considéré. Cette suggestion a été utilisée plus que d'autres qui portaient cette indication, y compris par des enseignants de collège. La liaison traditionnelle des fractions avec les parts de tarte retrouverait-elle ici une nouvelle jeunesse ?

Si nous comparons avec la suggestion 4 (*Liaison entre ordre et addition*), suggestion qui invitait à prolonger l'étude des fractions par l'emploi de la demi-droite numérique, nous avons la confirmation que la structuration additive des fractions de même dénominateur est hors du champ de préoccupation des classes de sixième : à ce niveau, une fraction ne peut représenter une longueur, même sur la demi-droite numérique. La comparaison des fractions n'est pas liée à leur addition.

La suggestion 5 (*Liaison entre fraction et division euclidienne*) était jugée a priori hors sujet pour l'école élémentaire, mais nous nous attendions à son emploi dans le cadre des compétences exigibles de cinquième et peut-être de sixième. Cela n'a pas été le cas. Cela est-il dû à notre présentation qui la mettait à la suite de la suggestion 4, non exigible en sixième et cinquième ? Cela vient-il du vocabulaire des intervalles qui renvoie à l'époque des mathématiques modernes, jugée révolue aujourd'hui ?

La suggestion 10 (*Agrandissement d'un puzzle*) nous avait parue exigible en collège pour sa partie 1, puisque le multiplicateur faisait jouer seulement entiers et décimaux. C'est, en outre, une situation reprise dans de nombreuses publications. Nous avons été surprise du nombre modéré d'utilisateurs en collège. Nous avons confirmation des réticences des enseignants à mélanger fractions-opérateurs et fractions-mesure.

Les suggestion 8 (*Les grandeurs et les unités de référence, l'algèbre sous-jacente*), 9 (*Les grandeurs et les unités conventionnelles*), 11(*Calculer, fabriquer, mesurer*) et 12 (*Fonction numérique et valeur approchée*) nous paraissaient difficiles à utiliser. C'est ce qui a été confirmé.

La suggestion 12 (*Fonction numérique et valeur approchée*) est particulière, puisque c'est la seule qui recourt de manière systématique aux graphiques comme aide à la résolution de problèmes. A noter que les deux enseignants qui l'ont utilisée sont des formateurs.

Nous allons reprendre l'une après l'autre les suggestions et mettre en rapport ce que les enseignants ont repris de nos suggestions et ce qu'ils nous en ont dit.

6- Ce que les enseignants ont repris et leur opinion

Nous adopterons le plan d'étude suivant :

- nous examinerons les caractéristiques des enseignants qui ont utilisé les suggestions (au moins en partie),
- nous verrons ensuite les niveaux qu'ils recommandent pour leur utilisation,

- dans le cas où le niveau recommandé correspond au leur, nous indiquerons s'ils seraient prêts à reprendre eux-mêmes la suggestion, au besoin avec quelques modifications.

Nous illustrerons leurs opinions en extrayant des entretiens ce que certains enseignants ont dit à propos des suggestions.

6.1- Suggestion 1: Le calcul approché sur les entiers et les décimaux

Nous avions voulu éviter les non-réponses en fournissant des exercices faisables dès le CM1. Les exercices étaient indépendants les uns des autres et, dans leur majorité, consistaient en des exercices d'entraînement, sans recherche. La suggestion 1 a été effectivement très utilisée : 9 enseignants sur 15 à l'école primaire (3 formateurs, une maîtresse temporaire d'accueil, 5 autres enseignants), tous les enseignants de sixième.

Quasiment tous les enseignants trouvent ces exercices intéressants, qu'ils travaillent en école ou en collège, et déclarent vouloir reprendre ce genre d'exercices l'année suivante.

Une enseignante de sixième (élèves de niveau moyen) n'aime pas la présentation de certains exercices qui peut provoquer des dérapages dans le fonctionnement de la classe : par exemple, elle préfère ne pas jouer au jeu "Tu chauffes, tu brûles" et, plus généralement, elle préfère ne recourir ni à des jeux ni à des travaux de groupe. L'enseignant de cinquième (formateur) estime que ce sont des activités de l'école primaire.

(F, formatrice, 15 ans d'ancienneté, école n° 7, CM2, niveau fort)

> Moi, j'ai fait surtout la feuille 1. Je l'ai faite sur ardoise, malheureusement, il n'y aura pas de trace écrite dans les cahiers. Je m'en suis servie en calcul rapide. Les élèves ont adoré le "Tu chauffes, tu brûles". Vraiment le jeu.

(H, formateur, 12 ans d'ancienneté, école n° 8, CM2, niveau moyen)

> J'ai beaucoup utilisé ce que tu proposes en calcul mental, parce que j'ai l'habitude de faire des choses similaires. J'ai l'habitude de faire beaucoup de calcul mental, j'aime ça. (...) Donc écrire un nombre et anticiper le résultat, je ne l'ai fait qu'avec des entiers. Je n'ai pas commencé la multiplication décimale, (...) Ça [tu chauffes, tu brûles...], ce sont des jeux que j'ai faits... uniquement avec des entiers, j'invente un nombre, euh, ça marchait bien, mais ça fait beaucoup de bruit, alors je l'ai oublié. C'est pas que je veuille pas le refaire !

(Deux enseignantes F, collège n° 2, sixième, niveaux faibles)

> - Les exercices sous forme de jeu, ça, ils aimaient bien.
> - Ah oui, "tu chauffes, tu brûles, tu gèles", (silence) après, ils ont demandé à être meneurs de jeu. Ils choisissaient un nombre.
> - Ou alors un nombre proche, 1 virgule 9 et l'encadrement, ... et finalement les autres voyaient vite comment trouver le nombre. Ils voyaient bien, étant donner ce meneur de jeu-là, il doit nous faire... (...)
> - Ils ont bien aimé. Mais je ne sais pas si j'ai bien exploité...(silence). (...)
> - Mais là, on s'aperçoit qu'ils ne s'écoutent pas. Il y a toutes ces difficultés annexes (silence). C'est surtout eux et le prof, mais ils ne s'écoutent pas entre eux. (...)
> - Je ne sais pas s'ils s'en sont servi vraiment, parce qu'après, pour situer sur une graduation, ils ont beaucoup de mal. Je ne sais pas s'ils ont fait le rapprochement.
> - Situer sur une graduation, ils ont énormément de mal. (...)

- On n'a pas eu le temps de l'exploiter, parce qu'on est obligé de suivre le rythme, en groupe. Moi j'ai essayé de faire des choses, mais je n'ai pas eu le temps d'en tirer des conséquences et ils ont changé de groupe, je n'avais plus eu les mêmes à un moment, et puis,...
- Et ceux qui sont en difficulté, ce sont de telles difficultés que ça ne suffit pas. C'est-à-dire que ceux qui n'avaient pas compris les décimaux, ils ne l'ont toujours pas compris.

Quatre enseignants citent explicitement les exercices qui obligeaient à traiter des écarts ("tu chauffes, tu brûles", distance sur la droite numérique). Il est probable que, pour les autres, le lien avec le calcul approché soit fait au sens habituel, c'est-à-dire "en gros", sans préoccupation de distance.

6.2- Suggestion 2 : Les grandeurs familières - Interprétation de résultats affichés à la calculatrice

Cette suggestion est assez utilisée, avec ou sans calculatrice : 4 enseignants d'école primaire (2 formateurs, 1 maîtresse temporaire d'accueil) et 6 enseignants de collège (parmi eux, aucun formateur). Trois enseignants d'école primaire ont remis des comptes rendus détaillés avec analyse d'erreurs.

La première partie est jugée très utile, même sans calculatrice. C'est en relation avec la vie pratique, cela rejoint le vécu. Une autre (CM1, niveau moyen) pense que c'est peut-être difficile chez des élèves qui ne sont pas à l'aise avec les mesures.

En collège, cela permet de faire des révisions. Une enseignante du secondaire (élèves faibles) pense que la calculatrice "n'aide pas". Certains trouvent des énoncés analogues dans leur livre.

La première partie (calcul additif) est recommandée par 9 enseignants du primaire et 7 enseignants du secondaire, ils seraient prêts à l'utiliser eux-mêmes (sauf 1 dans le primaire et 1 dans le secondaire). Plusieurs enseignants ont suggéré des améliorations.

Niveau	Ont fait	Recommandent	Reprendraient
8 enseignants CM1	0	4	4
7 enseignants CM2	4	5	4
8 enseignants 6°	6	7	6
1 enseignant 5°	0	0	0
Total : 24 enseignants	10	16	14

Partie additive

(H, 18 ans d'ancienneté, école n°3, CM1-CM2, niveau moyen)

Mais moi je trouve que c'est tout à fait important, parce qu'il y a un certain nombre de données matérielles et disons... de l'ordre du quotidien, qui marchent mieux, et qui, même, marchent pas mal même avec les enfants en difficulté. Ils savent quand même calculer 1 kilo virgule quelque chose, et alors que dans le problème si on utilise des ... termes un peu plus difficiles... ou si on passe tout de suite à des données abstraites, alors là ils sont complètement perdus. Tandis que là au moins, c'est du concret. (...)
Par contre là, les zéros virgule quelque chose, là, ils ont vraiment du mal à aborder cette notion. (...) Les nombres plus petits que 1... c'est troublant, de toutes façons.

JB- Même après, en collège, ils ont du mal. Disons, ils se font piéger.
- Exactement. Ils vont déplacer une virgule pour que... ça fasse plus grand.

(H, 23 ans d'ancienneté, école n°4, CM1, niveau faible)

On apprend les nombres décimaux, donc il y a des virgules, et il faut mettre les virgules partout. Si dans un problème, ils commencent par des nombres entiers, pour eux ce n'est plus la leçon sur les nombres décimaux, donc ils ont cloisonné ça. Il n'y a pas suffisamment de corrélation entre ce qu'on enseigne, parce que je pense que ça vient aussi de nous, quand on aborde les nombres décimaux, on n'écrit que des nombres décimaux et on ne fait sans doute pas suffisamment de lien entre les nombres décimaux et les nombres entiers. Moi j'en fais, je pensais que c'était suffisant, mais la preuve que non.... Lorsque j'aborde la soustraction, je leur dis qu'un nombre entier peut être aussi un nombre décimal, donc virgule zéro zéro, pour éviter d'avoir ce genre de confusion, mettre les unités sous les centièmes ou des choses comme ça.

(F, formatrice, 15 ans d'ancienneté, école n°7, CM2, niveau fort)

- J'ai fait la semaine dernière la suggestion n°2, les grandeurs avec la calculatrice, parce qu'on utilise pas mal la calculatrice en fin d'année et je me suis dit que ça serait un bon support. D'abord, ils ont adoré faire ça. Ce que j'ai fait, j'ai utilisé deux façons, l'ardoise et la feuille. Pour qu'il y ait une petite trace, j'ai collecté les travaux faits par les enfants, par groupe de deux, pour que tu voies comment ils ont procédé. Alors, en ce qui concerne les grandeurs familières, c'est-à-dire longueurs-1, longueurs-2, prix, pour eux, je n'ai pas trouvé de grosses difficultés. (...) Par contre, pour les masses, on en discutait avec X. tout à l'heure, l'énoncé avec le panier lourd à porter, là, il y a eu beaucoup d'erreurs, j'ai eu 50 % d'erreurs.
JB- Qui proviennent du fait qu'il y a des mélanges d'additions et de multiplications ?
- Non, en fait, ça a été très dur pour eux, par exemple de voir en fait que 4 yaourts à 125 grammes , ça faisait en fait zéro virgule 500 kilo et d'ajouter ça par exemple à 3 kilos 500 de farine. Ça, ça a été très dur pour eux, enfin pour les moins bons, j'ai eu quand même 50 % d'erreur.
JB - En fait, la situation des grammes par rapport au kilo n'est pas...
- Là, ça n'a pas été clair pour eux, pas du tout. (..)
X - Quand on fait des conversions toutes bêtes, ça va. Dès que ça se relie à un raisonnement, alors aïe aïe aïe...!
- Beaucoup aussi ne supprimaient pas les zéros, ça aussi je l'ai constaté. Et je dirais que ça, ça leur a posé vraiment des difficultés, comparé aux prix qui sont affichés et qu'ils n'ont qu'à additionner.
JB- Pour eux, ce n'est pas si familier, autrement dit.

La deuxième partie supposait de travailler la multiplication de décimaux et de gérer des arrondis.

Les enseignants d'école primaire ne la commentent pas beaucoup [1]. Pour l'un d'entre eux, le problème de l'arrondi ne se pose pas : on tronque.

(H, maître temporaire d'accueil, 6 ans d'ancienneté, école n° 8, CM2, niveau moyen)

(...) moi je ne travaille pas tellement sur les arrondis comme on peut faire en collège, troncature, etc. Mais je leur dis de s'arrêter 2 chiffres après la virgule, quand on parle de monnaie, de francs, je leur dis systématiquement : arrêtez-vous à

[1] Rappelons que le produit de deux nombres décimaux ne figure plus dans les textes officiels de cycle 3 depuis 1995.

2 chiffres après la virgule, même si ça continue. Donc ça fait de petites erreurs de calcul, bon si on travaille sur de grandes masses, ça peut faire des erreurs de calcul. Mais je leur dis, moi de toutes façons, ça m'importe peu, puisque je leur dis : après les centimes, il n'y a plus rien, donc arrêtez-vous à 2 chiffres après la virgule, sans chercher vraiment l'explication, mais sans arrondir si c'est supérieur ou inférieur, je leur dis d'arrêter.

Deux enseignants (1 formatrice de primaire, 1 de secondaire) mettent en relation avec les arrondis des moyennes de notes. Un enseignant d'école primaire observe que la multiplication par un nombre inférieur à 1 est déroutante pour les élèves. Seuls deux enseignants d'école primaire (1 formateur et 1 maître temporaire d'accueil) recommandent cette partie et un seul l'utiliserait pour travailler la proportionnalité et, dans ce cas, ne ferait pas d'arrondi (maître temporaire d'accueil).

Les deux formateurs de collège sont d'avis divergents : l'un recommande la partie multiplicative pour l'école primaire, en la simplifiant (avec de "bons nombres"), tandis que pour l'autre formateur, elle serait utile en sixième et il serait prêt à l'utiliser.

Un enseignant du secondaire décrit son étonnement devant la réaction de ses élèves : quel est le "vrai nombre" correspondant à un produit de décimaux quand il s'agit de francs et centimes ?

(H, lien avec DEP, 7 ans d'ancienneté, collège n° 1, sixième, niveau moyen, entretien en cours d'année)

L'activité 2, alors là, je n'ai pas pu la mener jusqu'au bout. Avec une classe, je leur ai demandé de la faire, avec l'autre classe j'ai été bloqué tout de suite, parce qu'ils m'ont demandé : mais comment on peut faire pour calculer le prix exact ?
JB- Ils n'avaient pas de calculatrice ?
- Si ! Mais ils ne savent pas...[interruption de bande]. Il y en a qui savent, mais il y en a beaucoup trop qui ne savaient pas. Mais je leur ai dit : quand tu achètes 2 kilos d'oranges à 3 F, combien tu payes ? Il me dit eh bien 6 F. Eh bien, tu achètes maintenant 2 kilos et demi, 2 virgule 5 kilo. Là ça a été un peu plus dur, mais ils ont trouvé finalement : il m'a répondu la bonne réponse en ayant décomposé le calcul, c'est à dire 1 kilo + 1 kilo + un demi-kilo, donc en gros ils y arrivent. Mais alors si j'achète au lieu de 2 kilo virgule 5, j'achète 2 kilos virgule 1, et là, ils ne savaient plus. En gros, 1 kilo 305, sachant que c'est 5 Francs 80 le kilo, ils ont été incapables pour plus de la moitié de la classe de calculer le prix exact. (...) Ça veut dire que lorsqu'on travaillera sur les problèmes de proportionnalité, il va falloir qu'on remette à plat un certain nombre de choses, et je sens que là on va avoir encore du travail. Donc l'histoire de la maquette, j'ai laissé tomber pour le moment, et donc ça c'est renvoyé dans le courant du troisième trimestre dans les problèmes de proportionnalité (...). La multiplication 1,305 x 5,80, ils savent la poser, enfin ils la posent, il y en a qui se trompent et d'autres qui ne trompent pas. Avec la calculatrice, il n'y a aucun problème.
JB- Avec la calculatrice, ils ne voient pas quelle touche de la calculatrice pourrait correspondre à ça.
- Eh bien, ils n'imaginent pas que finalement ... que ce soit 1, 2 ou 3 kilos, ou 1 virgule 5 kilo ou 1 virgule 305 kilo, le problème est exactement le même.
JB- C'est un truc absolument faramineux !
- Et dans les deux classes, j'ai rencontré le problème dans les deux cas, dans la deuxième classe de façon moins.., de façon moins évidente, donc on a remis à plat rapidement le problème et puis je leur ai dit : "Maintenant, vous faites l'activité" et puis ils l'ont faite. Mais ce qui s'est passé et qui est intéressant pour ceux qui l'ont faite, c'est quasiment plus de la moitié de la classe, ce qu'ils appellent le prix

exact n'est pas le prix exact. En fait, ils ont bien fait 1,305 x 5,80 à la calculatrice, mais ils ont tronqué systématiquement au deuxième chiffre après la virgule. Et ils l'appelaient prix exact, et pour eux c'était ça.
JB- Parce qu'il fallait trouver des francs et des centimes.
- Pour eux, au-delà du centime, ça n'existe plus. On gomme.

(Professeurs en équipe, collège n° 2, sixièmes plutôt faibles, entretien en cours d'année)

Partie additive
- Moi, ce que je veux dire, pour des kilos, en fin de compte, ils se trompent moins qu'avec des francs, parce qu'ils font leurs tableaux. Ils se redisent les unités. Alors qu'avec les francs, c'est quelque chose qu'ils utilisent tous les jours, 142,5, c'est 142 F et 5 centimes. Sinon, on dirait 50.

Partie multiplicative
- Faudrait les faire étiquette par étiquette, parce que là, ils voient tous ces nombres, et ils ne savent pas s'organiser dans tout ça. (...)
- Ce qui est bien quand même, ça leur montre aux gamins comment on utilise ça dans la vie courante, en fait, je veux dire, sur le plan culture, c'est intéressant enfin les gamins ça les a surpris, ils n'avaient pas du tout réfléchi à ce genre de choses.
JB- Ils savaient qu'on arrondissait?
- Pas vraiment, ils savaient rien du tout, ils pensaient qu'on multiplie puis qu'on enlève. Ça les a quand même surpris et puis ils se sont quand même accrochés,
- Et puis il y a certains qui ont regardé après les étiquettes. Deux élèves du groupe, qui ont regardé les prix et qui ont trouvé, des fois, virgule 82. Alors là, ils sont venus me poser la question, mais les centimes, ça n'existe pas, ça leur a posé des problèmes. Comment on va faire pour payer 13,82 F. Ils m'avaient amené l'étiquette, je ne sais plus de quoi, 13,82. Ça les a étonnés. Je pense que le gamin, il n'aurait peut-être pas regardé si on n'avait pas fait ça.
- (inaudible)
JB- Ils vous posent la question "à quoi ça sert" ?
- Ça sert les maths, en général ?
- Ils se sont posé la question. Mais évidemment ça a passé au-dessus de la tête des élèves en difficulté. Mais pour les autres...

Ce qui vient d'être relaté montre que les grandeurs dites familières ne le sont pas autant qu'on pourrait croire, même pour la structuration additive. Pour la partie multiplicative, on retrouve un phénomène déjà décrit dans de nombreux travaux : la prégnance de l'addition répétée devient un obstacle pour la multiplication de décimaux, même lorsque les élèves disposent d'une calculatrice. Le contrôle de qualité de l'arrondi a été peu traité : or la résolution de cette question donnait du sens à l'expression "à 5 centimes près".

On peut noter l'intérêt des enseignants pour les questions de modélisation.

6.3- Suggestion 3 : Les grandeurs et les unités de référence. Fractionnement de l'unité - graduation

La suggestion 3 est une de celles que nous avions reprises de la progression D & P.

Elle a été utilisée à la fois à l'école primaire (5 enseignants dont 3 formateurs et 1 maîtresse temporaire d'accueil) et au collège (1 fois). Les enseignants qui l'ont utilisée sont prêts à recommencer. D'autres seraient prêts à le faire : 1 à l'école primaire et 3 au collège (en classe de cinquième, voire quatrième).

A l'école primaire, sur les 4 formateurs, 3 l'ont utilisée. La quatrième formatrice (classe de niveau fort) pense que la manipulation de matériel prend trop de temps. En collège, les formateurs ne l'ont pas utilisée, mais ils la conseillent pour la classe de cinquième et l'un d'eux serait prêt à l'utiliser lui-même.

Quelques difficultés d'utilisation ont été signalées (1 formatrice et 1 maîtresse temporaire d'accueil à l'école primaire, 1 enseignante du secondaire). Presque tous les exercices insistent sur le passage matériel ---> fraction, au détriment du passage inverse. Or le passage fraction ---> aire (ou longueur) permet aux élèves de contrôler par eux-mêmes l'exactitude des résultats qu'ils annoncent dans le cadre numérique. Il nous est apparu que la suggestion 3 pourrait effectivement être améliorée en y incluant des exercices de décodage.

Les enseignants qui ont utilisé cette suggestion donnent beaucoup d'explications sur le déroulement des séances.

(H, 10 ans d'ancienneté, école n° 9, CM2, niveau moyen)

- 1/8 et 1/4. Je me souviens que le groupe n'avait pas trouvé dans leur activité de groupe, mais quand ils l'ont présenté au tableau, un autre groupe avait trouvé, ils avaient à peu près le même. Ils avaient trouvé la partie la plus difficile, et en fait la partie la plus difficile était un multiple de cette petite partie. En fait, en comparant avec un autre groupe, ils ont réussi à trouver. Ils ont trouvé au tableau. (...)
C'est un autre groupe qui leur a donné la solution. Les autres étaient partis, ça leur avait paru évident. 3/8 c'est 1/8 + 1/8 + 1/8. Alors moi, j'ai introduit l'addition des fractions, toutes les opérations, soustraction, multiplication.
JB- Multiplication par des entiers ?
- Oui, multiplication par des entiers. Ensuite, on les a comparés. Parce que sous cette forme, c'est très facile à comparer. Par exemple, celle-là, on voit bien. Après, on les compare avec les écritures. On peut les ranger facilement. Ce qu'ils ont bien compris déjà avec cet exercice-là, c'est qu'avec des numérateurs semblables, plus le dénominateur était grand, plus la fraction était petite, ce qui leur semblait bizarre sur les écritures. Parce que il y en a beaucoup qui se sont dit : ça ne peut pas être ça, on s'est sûrement trompé. En fait, ils ont compris que ça c'est plus petit que ça. C'est ce qui leur a confirmé qu'ils ne s'étaient pas trompés, que le dénominateur était plus grand, la fraction était plus petite. Sinon, au niveau de l'écriture, a priori, ils disaient ...
- qu'un huitième est plus grand qu'un quart.
- Et ils ont vu que ça clochait, que ce n'était pas vrai.

Au collège, l'unique utilisatrice souligne que le recours à un matériel basé sur les aires est plus favorable que les bandes : en effet, il est très difficile d'interdire aux élèves de mesurer les longueurs en centimètres et millimètres. Les trois autres futurs utilisateurs trouvent que la suggestion 3 présente un matériel propice aux révisions de cinquième, qu'elle permet "d'imaginer une fraction".

(Collègues en équipe, entretien en cours d'année, collège n° 2, sixièmes, niveaux faible ou moyen)

- On attaque ça à la rentrée, le fractionnement.
JB- Avec le système du puzzle ?
- Le puzzle, sûrement pas. (...)
- Moi ce que j'ai peur, c'est fraction d'unité d'aire. Parce qu'on a vu que la notion d'aire, et qui est très difficile...

JB- Un rectangle coupé par la diagonale ou coupé par le milieu (je fais des dessins) ?
- (Soupirs).
JB- Ça, c'est affreux ? On ne sait pas si c'est la moitié ?
- Oui.
- La diagonale, je peux vous assurer qu'en sixième, si vous mettez 20 carreaux, le morceau du dessus, ça fait combien, ça fait 10 ? Non, Madame, quand je compte les carreaux traversés, ça ne fait pas 10.
JB- Et ils ne peuvent pas dire la moitié au moins ?
- Mais ils n'ont pas de notion de moitié.
- Et en cinquième quand j'ai dit que 30 était la moitié de 60, eh bien, le mot n'était pas sorti, quand j'ai dit le mot, ça n'a pas éclairé du tout. C'est un truc que je voulais dire, les nombres, je trouve que c'est en ce moment un obstacle monumental à la compréhension.
- La manipulation...
- Et qui traîne et qui traîne..
- C'est handicapant. (...)
- J. trouve qu'ils ont eu du mal. Enfin, ils ne se sont pas donné le droit de plier, par exemple, au début, alors ça a été très long. (...) Chez nous, ils considèrent que s'ils prennent la paire de ciseaux ils ne font pas de maths. Ça arrive quelquefois qu'on fasse plier, qu'on fasse découper, je pense à la symétrie, enfin... eh bien, ce n'est pas sérieux, ce n'est pas des maths, quand on fait dessiner sur la vitre par décalcomanie. (...)
D- Je n'ai pas fait l'aire, j'ai fait la droite numérique.
JB - Vous, vous êtes avec le groupe 3 [moyen] (à D.).
D - Non, groupe 2 et groupe 3, c'est-à-dire, faible et moyen. Après, une fois qu'ils ont compris ça, ça allait très vite pour ... pour des notions qui normalement arrivent après. C'est-à-dire ça ensuite [les égalités inscrites sur la feuille de suggestion], bon ils faisaient facilement 4 fois 1/5, ils avaient compris, etc. Et puis, après, encadrer une fraction par rapport, la comparer à 1, tout de suite, on n'a pas eu besoin de passer par la règle, tout de suite ils ont vu, pas par la droite numérique. C'était plus petit ou plus grand que 1. Ils ont vu.
JB- Ça va vite.
D- Ça va très vite avec le matériel. Quoi d'autre encore ? Pareil : encadrer aussi une fraction entre 2 entiers, très vite aussi. Euh, les fractions décimales, c'est pareil, c'est allé vite, alors moi, j'étais toute contente. Mais là où j'étais terriblement déçue, c'est quand on a fait le contrôle, où là il y a une droite numérique, c'est comme si on n'avait rien fait.
JB- C'est contextualisé par la bande, mais pas par la droite. Le passage de la bande à la droite ...
D- Ah pourtant, si! Parce que moi j'ai fait travailler sur la droite, quand même. Non, c'est le passage au contrôle, je ne sais pas, c'est comme si on n'avait rien fait. Enfin, pas plus ni mieux que d'habitude, quoi... ils ont fait, ils ont écrit énormément d'erreurs comme tous les autres. (...) Ils ont bien aimé, moi j'ai eu du plaisir, ça changeait. Avec la bande de papier, ça allait bien. Ils ont eu plus de mal quand on est passé à la droite numérique.

(F, 19 ans d'ancienneté, avec collègue, collège n° 2, sixième, niveau faible)

- La 3, sur l'introduction des fractions, ça serait intéressant, elle est difficile, mais peut-être qu'en cherchant d'autres choses... parce qu'on se pose beaucoup de questions sur les décimaux, comment faire...
- Ah c'est celle-là avec les bandes de papier ? Ça n'a pas marché du tout, ils n'ont pas du tout pensé au pliage.
JB- Il y a eu un groupe que j'avais eu au mois de mars, je ne me souviens plus, qui

avait dit que c'était intéressant, avec la partie du puzzle.
- Je l'ai fait avec le puzzle, ça marche mieux qu'avec la bande de papier. Parce qu'avec le puzzle, ils peuvent déplacer les morceaux, se rendre compte... tandis qu'avec la bande de papier, l'idée de plier, non, le réflexe, c'est de mesurer, on prend le double-décimètre. Même au début, ils me demandaient : Madame, je prends un segment de quelle longueur ?
JB- En fait la perturbation...
- Dès le départ, ils voulaient mesurer, mesurer quelque chose sans double-décimètre !
JB - Finalement, ce support les éloigne de l'usage de la règle graduée, le support du puzzle.
(Les deux) - Là oui !

Les raisons de ne pas utiliser ces fiches se regroupent en trois catégories :
- la répartition entre CM1 et CM2 faite dans l'école laisse les fractions au CM2 (4 enseignants du primaire),
- recourir à ce procédé n'est pas habituel, on utilise le manuel de la classe (2 enseignants du primaire, 2 du collège),
- introduire l'addition des fractions ne se justifie pas, les fractions (décimales ou non) comme rapport partie/tout suffisent sans qu'on ait besoin de l'addition (4 enseignants du primaire), il vaut mieux travailler directement sur les quotients (1 formateur de collège).

Une enseignante de secondaire (niveau moyen) trouve la mise en oeuvre trop coûteuse et s'interroge sur l'intérêt de recourir à des jeux qui font trop enfantins et que les pré-adolescents rejettent.

(H, lien avec DEP, 7 ans d'ancienneté, collège n° 1, sixième, niveau moyen)

Cette année, je n'ai pas différencié fractions d'écritures fractionnaires ou de... quotients, j'ai groupé le tout. Je n'ai pas fait d'abord le quotient et après les fractions... J'ai travaillé sur cette notion de nombres avec différentes écritures, sous forme de quotient, avec passage de l'écriture sous forme de divisions à l'écriture sous forme de trait de quotient. Par contre, ce que je n'ai pas vraiment travaillé cette année, c'est l'aspect, je dirais..., très manipulatoire des choses, de faire fractionner des unités, des choses comme ça. Par contre, ce qu'ils ont bien, normalement, acquis, mais je n'ai pas de certitude absolue à ce niveau-là, c'est cette notion de finalement un nombre, des écritures et on utilise différentes écritures en fonction des situations. Ce qui me plaît bien ici, c'est que les fractions interviennent ici sous forme de .. de quantités, de nombres qu'on peut manipuler, additionner,on peut faire des opérations avec, on peut aussi représenter les choses de façon très... très simple, très concrète, ça me paraît très intéressant de reprendre ça si on ne l'a pas fait en sixième, de le faire sous cette forme-là en cinquième.
JB- Ce que j'avais vu sur les fractions, dans le programme de sixième, je ne voyais pas quelles pouvaient être les situations où on était amené à faire des comparaisons entre les fractions et les entiers. Je n'arrivais pas à trouver...
- C'est vrai que la façon dont.... moi je trouve que la notion de fraction dans le programme de sixième est une notion particulièrement difficile à mettre en place si on suit le programme. A aucun moment, cette notion de fraction n'intervient de façon clairement mathématique, ça devient, bon, si on regarde les manuels, c'est on fait des petits découpages, mais par exemple, le problème de représenter une fraction plus grande que 1, tout de suite on est bloqué, le problème de savoir ce qu'est la fraction 4 sur 4, par exemple, on est bloqué. Cette notion de comprendre

qu'un nombre c'est finalement une partie entière et un petit résidu de quelque chose, ça n'apparaît pas non plus, et c'est vrai que ça me gêne profondément aussi. C'est vrai que c'est en cinquième qu'on travaille là-dessus, mais ça me paraît plus important de commencer en sixième à montrer qu'une écriture, un nombre, c'est différentes écritures etc.

Nous voyons que les enseignants de l'école primaire sont plus favorables à la suggestion 3 que leurs collègues du collège. Nous savions que cette suggestion ne s'inscrivait pas dans les exigences des programmes officiels de collège. En effet, les programmes de sixième et cinquième en vigueur au moment de l'expérimentation repoussent l'addition des fractions non décimales à la classe de quatrième (avec un point de vue algébrique) : en sixième, les quotients de décimaux désignent des multiplicateurs dans une relation de proportionnalité. Cette position est compatible avec la fraction comme rapport partie/tout, mais pas comme mesure de grandeur.

Les réactions des collègues de collège sont en majorité conformes au point de vue adopté dans les textes officiels. Néanmoins des enseignants seraient prêts à utiliser la suggestion 3 en révision, ce qui prouve une certaine ouverture vers la structuration additive des fractions.

6.4- Suggestion 4 : Liaison entre ordre et addition. Suggestion 5 : Liaison entre fraction et division euclidienne

Les deux suggestions 4 et 5 sont inspirées des progressions de référence (B & B, D & P). Ces suggestions donnaient l'occasion de lier l'ordre et l'addition, de faire la jonction également entre la division euclidienne et les fractions.

Aucun enseignant d'école primaire ne les a utilisées. Les seuls utilisateurs du secondaire sont les deux formateurs (classes de niveaux forts). Ils se déclarent prêts à les réutiliser. L'un d'eux signale l'obstacle du mot "intervalle", qui n'est pas connu des élèves.

(H, 21 ans d'ancienneté, formateur, collège n° 3, sixième, niveau fort)

- J'ai utilisé fraction et division euclidienne. J'ai réutilisé, comme l'an dernier. (...) L'an dernier je l'avais fait en cinquième. Là, c'est en sixième. Je trouve que ça a bien marché, de la même manière (..). J'ai repris après la division euclidienne. Parce que là j'ai traité la division en tant que ça un nombre entier + quelque chose plus petit que 1. Puis j'ai fait des choses, je suis revenu à la division euclidienne,
JB- Comme ça on peut raccrocher au quotient.
- Voilà, comme ça. Je trouve que c'est une démarche intéressante, de démarrer. Avant, je faisais dans l'autre sens.
JB- Qu'est ce que vous appelez l'autre sens ?
- La division euclidienne, enfin la technique et après, de se dire, le reste est plus petit donc on peut écrire ça, mais je trouve ça plus artificiel.
JB- D'accord. Pour eux, ça permet de revoir la division sans..., sans avoir l'impression de répéter l'école primaire peut-être.
- Voilà, je pense que je me basais trop sur la technique à ce moment-là. Et ça n'avait pas tellement de sens, c'est vrai que, là ça donne du sens, et après, on se dit, j'ai une technique, je peux en inventer une autre, et ça, je crois que, voilà ce qui m'intéresse, cette démarche. (Silence). Parce que c'est souvent ce qui leur manque, je veux dire, la technique ne marche pas bien parce qu'ils ne donnent pas de sens aux opérations. Et ça, ça leur permet de donner du sens, ce problème du choix de l'intervalle, de voir ce qui reste, ils tracent,

> JB- On voit ce qui reste, c'est vrai.
> - J'allais dire, et ça c'est important, et puis le reste, il est forcément plus petit que l'intervalle, enfin, bon tous ces aspects-là, qu'on découvre là-dedans. (...) C'est satisfaisant quand même de voir qu'il y a les bords et ce qu'il y a entre les deux. Je crois que ce qui est important aussi, je ne sais pas sous quelle forme on peut développer ça, mais ça permet de sentir, quelque part, ils ont senti qu'il y avait plein de nombres, entre (...). Ils voulaient, ils cherchaient à approcher d'autres nombres, en fait. Et bon, alors là, je n'ai pas su bien, enfin, exploiter, comment on pourrait prolonger cette idée.
> JB- Ils ont une intuition formidable.
> - Eh bien oui, je veux dire, on voit que ça se remplit, petit à petit.

Tous les enseignants de l'école primaire jugent ces deux suggestions trop élevées à ce niveau. Ils pensent que c'est utilisable en collège, puisqu'on y traite des fractions.

Sur les sept enseignants de collège qui ne sont pas formateurs, cinq pensent que les fiches seraient utilisables en cinquième, mais deux d'entre eux seulement les utiliseraient eux-mêmes (enseignants liés à la DEP, sixièmes de niveau moyen).

Une enseignante de collège n'a pas utilisé ces suggestions parce qu'elle juge les méthodes suggérées inapplicables dans sa classe de sixième.

(F, 20 ans d'ancienneté, collège n° 3, sixième de soutien, niveau moyen)

> "Les élèves travaillent par deux ou par équipes plus nombreuses". Dans ce genre de classe pour accepter que deux parlent, les autres se taisent, et on recommence, deux autres, ça c'est très dur, ils vont tous parler en même temps. Alors ce n'est pas du tout le genre d'exercice que je vais choisir. J'aurais plus de temps à les faire taire, et en même temps me souvenir de la fraction, j'ai beaucoup de mal à gérer.

Les autres enseignants qui n'ont pas utilisé ces suggestions fournissent des arguments très généraux en faveur de leur utilisation : "ça correspond à l'esprit de cinquième", "ça permet de réviser". Deux d'entre eux pensent qu'elles seraient utilisables avec des classes de quatrième faibles.

On voit donc que les seuls enseignants qui accordent réellement de l'intérêt à la liaison entre ordre et addition sont les formateurs de collège et les deux enseignants en lien avec la DEP, puisqu'ils sont prêts à l'utiliser l'année suivante. Les autres enseignants ne s'y engageraient pas personnellement, cette position étant compatible avec les exigences des programmes officiels. Or, dans les progressions de référence, cette liaison est nécessaire pour introduire les décimaux comme solution approchée d'un problème. Il y a donc incompatibilité entre les propositions B & B et D & P et les pratiques enseignantes ordinaires.

6.5- Suggestion 6 : Problèmes additifs/soustractifs. Suggestion 7 : Problèmes multiplicatifs/"divisifs"

Les deux suggestions ont le même plan : l'une est de notre fabrication, l'autre est inspirée par la progression B & B.

Deux enseignants d'école primaire les ont utilisées en les aménageant : un formateur (classe de niveau moyen) et un enseignant ordinaire (classe de niveau moyen). Deux enseignantes de sixième les ont utilisées (groupe de niveau fort, classe de soutien de niveau moyen). Pour elles, les élèves ont beaucoup participé ; l'exercice était important pour la stabilisation du sens des opérations et pour la compréhension des énoncés de problèmes.

(Professeurs de 6° en équipe, collège n° 2, sixièmes, niveaux faible ou moyen)

- J'ai fait la multiplication et la division. 13 x 49 et 49 : 13, avec des nombres entiers.
JB- Ça, vous avez le sentiment que c'est une fiche qui ... vous apporte quelque chose pour votre progression ?
- Des choses logiques, ça paraît bizarre, mais il sort des choses bizarres (rires). Il y en a qui font des problèmes compliqués, et puis d'autres qui prennent les nombres et toc.
- Eh oui, l'esprit de synthèse (silence).
- Celui-là, il a pris dans le problème autre chose, des conditions supplémentaires. Sinon, la plupart n'utilisent que ces nombres-là. (...)
- C'est vrai qu'avec ce type de problème, enfin moi je ne l'ai pas fait, on voit que les gamins ont compris le sens de l'opération, par le texte, même si c'est des textes...
- Je ne sais pas si on peut proposer ça dans des groupes faibles. Dans des groupes faibles, on ne peut pas proposer ça.
- Je ne sais pas, justement.
- Je ne me suis pas encore posé la question, à quel moment,
- Quand on fait les opérations, on aurait,
- Inventer un problème,
- J'ai pas pensé,
- J'ai pas eu le temps.
- C'est vrai qu'on a toujours l'impression de courir après le temps.
- Toujours.
- Ca serait intéressant de voir avec les faibles, comment...
JB- Vous pensez qu'avec un groupe faible..., ce serait trop...
- En fait ça serait intéressant.
JB- Bien sûr le tri sera probablement plus long.
- En en mettant moins... justement (silence)
- Quelque chose de très simple, pas des divisions.
- Certains, celui-là, il a rajouté des choses. Il ne s'est pas contenté des 2 nombres.
JB- Il joue avec les données.
- Je crois qu'ils ne se rendent pas compte, pas du tout.
- Il y en a qui donnent la réponse, ils posent la question mais donnent la réponse.
JB- Ils n'ont pas compris ce qu'est un énoncé de problème.
- Tu vois, (à une collègue), après on peut travailler plein de choses, sur les problèmes.

(F, 20 ans d'ancienneté, collège n° 3, sixième de soutien, niveau moyen, entretien en cours d'année)

- Je n'ai pas perdu mon heure, non, j'ai passé que 20 minutes, je n'ai pas perdu du temps, parce qu'ils ont vu la différence entre un problème où les nombres ... et un autre où on ne pouvait accepter l'énoncé. Ce n'était pas une question de rédaction en français ! c'était une question de quelque chose de plausible. Et l'autre élève, alors, avait acheté des hectos, alors on a réfléchi à quelle unité : est-ce qu'on va mettre ça en kilo, en hecto, alors kilo, alors 9 kilos de bonbons, alors je leur ai dit : comment vous allez faire avec votre partage avec 6 et demi ? parce qu'ils voulaient partager en 6 personnes et demie. Ils m'ont dit : Mais Madame, c'est simple ! J'ai six copains et ma petite soeur. Ma petite soeur, je la compte pour un demi.

JB- Hum ! Pourquoi pas ?
- Pourquoi pas ?
JB- Là au moins, ça a été raccroché à du sens.
- Voilà.
JB- Pour des problèmes que j'avais pensés pour un niveau plus élevé, je trouve qu'ils ont trouvé... ils ont trouvé de l'intérêt en tous cas !
- Et oui, et alors, à la fin, on a trouvé 150 grammes par personne. Maintenant on va faire le contraire. Comment fais-tu pour distribuer tes bonbons ? Certains donnent 7 fois : il y avait 6 et la petite soeur. On donne 7 fois 150 grammes, certains élèves ont dit. D'autres ont dit : "Non, non, non. On donne à 6". "Mais ils sont 7, qu'est-ce qu'on fait ? "Ah, l'élève qui avait proposé : "Mais la petite soeur, on ne lui donne que 75 grammes". Je dis alors : "On écrit au tableau : 75 grammes, la soeur, 150 grammes pour les autres", On fait le total, et on trouvait 1980, non c'était 980, et on trouvait 975 grammes au lieu de 980. J'ai dit : "Qu'est-ce qui s'est passé, pourquoi reste-t-il 5 grammes ? " Toujours le même, il n'y en avait qu'un, me dit : "Madame, c'est normal, regardez, la division, on a laissé des choses. La division, elle se terminait pas". Là on a fait du travail, mais uniquement avec 2 ou 3. Alors...
JB- Les autres étaient passifs ... ou ils comprenaient après coup ?
- Ils m'ont paru quand même intéressés, puisque je n'ai pas eu du tout de chahut. Euh... certains avaient quand même les yeux vides, manifestement cela leur passait au-dessus, mais comme on parlait de choses concrètes, de bonbons, de partage, le vocabulaire, quand même ils pouvaient entendre. C'était, ils avaient un intérêt.
JB- Ce n'est pas... ce n'est pas un exercice facile de fabriquer des énoncés.
- Non non, c'est pour ça moi en général je ne le fais jamais. Parce que je trouve que ça me prend beaucoup de temps et je sais pas trop comment m'y prendre. Finalement j'ai été contente parce que j'ai envie que cet élève change de classe et c'est tout à fait confirmé, on le sentait bien, malheureusement, je le vois seul, les autres n'ont pas bien suivi (silence).

Cette même enseignante confirme en fin d'année l'intérêt de ces problèmes, dans une perspective de liaison avec l'école primaire.

Trouver des énoncés qui vont avec des situations d'opérations, moi j'avais l'impression que c'était acquis depuis longtemps. Moi j'ai découvert des gouffres. Je savais que multiplier par 10, 100, 1000... ça ne marchait pas. Mais je pensais que tout ce qui était sens de l'opération, c'était plus acquis... J'ai été étonnée aussi de voir que vous présentiez des tas de problèmes avec des fractions. Moi je n'avais pas l'habitude d'en faire et je n'en ai pratiquement pas fait, et la seule fois où j'ai essayé d'en faire, ça a intéressé les élèves, mais pour moi c'était très délicat. C'était pour moi une situation qui était, entre guillemets, anormale, quoi, si je puis dire, qui m'a un peu déstabilisée (silence). Ça, la situation puzzle, dans une autre classe, j'ai déjà étudié, pas de problème. Rectangle-périmètre, je fais d'habitude, mais plus tard. Je crois que c'est vraiment... peut-être parce que c'était le début, je me suis plus donnée à cette partie-là, le sens de l'opération.
JB- Ça, le sens de l'opération de l'école primaire...
- Nous, on le met nulle part, on considère que c'est acquis.

Un enseignant se demande pourquoi les fiches suggèrent d'autres classifications que celle résultant des opérations.

(H, entretien en cours d'année, collège n° 5, sixième [2])

- J'ai pris des situations simples de multiplication, plusieurs exercices qui mettaient en oeuvre des multiplications, et puis, après, on est passé aux divisions, des situations relativement simples aussi, donc, plein d'exercices. Et puis, après, j'ai fait un parallèle avec ces exercices que j'avais faits dans le livre, j'ai fait un parallèle pour montrer les situations qui amènent une multiplication et celles qui amènent la division.
JB- Vous vous êtes servi de cette fiche comme un fil conducteur.
- Non à vrai dire, je l'ai prise après. C'est vrai qu'après, en feuilletant, j'ai vu "problèmes multiplicatifs/"divisifs"", tiens, ça va aller bien dans le chapitre, et c'est ce que j'ai fait à la fin, donc, après avoir fait bien, j'ai schématisé en quelque sorte, j'ai schématisé les situations de multiplication... en faire un, une chose un peu générale et puis pareil pour la division. Et puis j'ai vu qu'on retrouvait l'histoire des 3 emplacements. Donc, après avoir fait ça, je leur ai présenté cette consigne, à peu près, d'inventer des problèmes où ils auraient à calculer les 4 opérations.(...)
JB- Et ça a donné l'effet escompté ?
- Ah oui, ils ont assez bien réagi. Ils ont assez bien trouvé, les problèmes qui ne convenaient pas. Surtout on s'aperçoit, je ne sais pas si on peut parler d'une confusion... beaucoup utilisent la soustraction. Ils font intervenir en fait une soustraction. Alors je me suis dit à un moment dans un cas ça ne marche pas. C'était une confusion soustraction/division. (...)
Ce que j'ai essayé de faire aussi, l'histoire des classifications, je crois que pour moi ce n'est même pas clair pour moi non plus, essayer de voir si on pouvait classer les problèmes sur d'autres critères, alors celui-là était évident (l'opération), puisque c'était le thème de la leçon, c'était ce que je voulais qu'ils travaillent, mais... j'ai pas trop insisté, on l'a fait ce matin, les classer avec d'autres critères, on n'a pas cherché très longtemps, mais il n'y a rien qui est vraiment sorti, sauf un enfant qui m'a dit... si !, on pourrait les classer selon les unités qui interviennent.
JB- Les unités, oui... les grandeurs.
- Les grandeurs, il y en a un qui me l'a dit. Voilà, en fait je me suis arrêté là. Je ne suis pas allé plus loin.

Pour cet enseignant, tous les problèmes de division sont semblables, puisqu'ils sont modélisés par la même opération arithmétique. Nous nous demandons si cette position n'est pas répandue : en effet, huit enseignants du primaire associent à ces suggestions des exercices d'invention de problèmes, ou des problèmes juxtaposés dont les valeurs numériques sont identiques, ou des contrôles de résultats de problèmes par calcul d'estimation. Nous nous demandons si ce décalage ne provient pas de deux types de confusions :
- la difficulté que présente le passage "équation ---> énoncé de problème " est assimilée au passage inverse : seule la deuxième situation est traitée et les enseignants ne voient pas pourquoi la première situation devrait être travaillée[3],
- tous les problèmes relevant d'une même opération arithmétique sont confondus : on parle "du" sens d'une opération et non "des" sens de l'opération.

2 L'enseignant n'a pas répondu à notre demande d'entretien en fin d'année. Il nous manque donc les renseignements sur sa classe et sur son parcours professionnel. Il n'est pas inclus dans les tableaux récapitulatifs du début de ce chapitre.
3 On peut rapprocher ce fait des différences notables dans les manuels entre le nombre d'exercices de codage et de décodage.

Les conditions de nos entretiens n'ont pas permis de lever ces ambiguïtés. L'enthousiasme des enseignants pour reprendre l'une ou l'autre des suggestions peut venir de ce malentendu.

Onze enseignants d'école primaire pensent que ces suggestions seraient utiles (avec des nombres entiers) et cinq d'entre eux les réutiliseraient (deux formateurs, classes de niveaux moyen et fort). Au collège, sept enseignants les conseillent en sixième, ou cinquième, voire au-delà, et cinq d'entre eux (un formateur, les deux collègues en lien avec la DEP) les réutiliseraient eux-mêmes. Un des deux enseignants en lien avec la DEP se demande toutefois si l'hétérogénéité des classes ne va pas nuire à l'efficacité du dispositif.

Pour le formateur de cinquième, le temps est trop réduit pour pouvoir traiter ce type d'exercices et d'ailleurs le produit de fractions ne convient pas à ce niveau.

(H, 23 ans d'ancienneté, formateur, collège n° 4, niveau fort)

> - Je crois que de toutes façons, faire inventer des problèmes, je crois que c'est important à tous les niveaux. Donc je ne peux pas dire que ce n'est pas du niveau de sixième. Mais il ne faut pas y passer des heures et des heures, parce qu'ils se lassent très vite.
> JB- Le problème du temps.
> - Peut-être donner en devoir. Mais ca ne fait pas l'objet d'une séance entière... enfin... ça se discute aussi. Mais tout ça, pour les élèves de sixième, ils ont déjà fait beaucoup de choses, tout le problème est de ne pas les lasser, de leur présenter des choses nouvelles. Enfin qu'on essaie, pour les motiver !
> JB- Vous diriez la même chose pour la fiche 7, multiplication et division ?
> - Là, j'enlèverais quand même les produits de fraction. Mais, alors, par contre, je vois 49 treizièmes. Je vois "inventer un problème où on aurait à calculer 49 treizièmes"... Il faut pas donner celui-ci dans cette activité-là mais il faut donner ce produit et plusieurs opérations.
> JB- Le but c'est que les gamins se remémorent les circonstances dans lesquelles on est amené à poser une opération qui sera désignée comme ça avec les deux points de l'école primaire (49 : 13). Après ça, ça sera le trait de fraction. Dans quelles circonstances à l'école primaire on utilise les deux points, parce que moi je l'ai rédigé aussi pour l'école primaire. C'est sûr que, pour vous, la différence entre division euclidienne et division exacte elle n'est pas notée avec... une notation. Mais dans quelle circonstance je peux être amenée à écrire 49 par 13 comme ça, qu'ils se rappellent les types de problèmes qu'on va tomber là-dessus. Après ça, on aura 49 / 13.
> - Notre démarche elle est plutôt : on a un problème, essayez de trouver l'opération qui correspond. Plutôt que : "vous avez une opération, trouvez un problème".
> JB- Oui, c'est une autre manière de faire réfléchir ?
> - A quel moment par rapport à l'exercice : "Vous avez un problème, trouvez l'opération", quand c'est une division, à quel moment leur placer ceci ?

Nous retenons de ces deux suggestions la disponibilité des enseignants de collège vis-à-vis des problèmes arithmétiques de l'école primaire. Ils ont pris au sérieux les recommandations liminaires des textes officiels sur la liaison entre résolution de problème et sens des opérations. Toutefois nous nous interrogeons sur les commentaires que les enseignants du primaire et du secondaire nous en ont fait : nous nous demandons si, pour eux, tous les problèmes relevant d'une même opération arithmétique ne sont pas considérés comme identiques. Dans ce cas, on voit mal comment ils pourraient accepter la progression B & B, qui fait évoluer le sens du produit de fractions, d'une multiplication externe (fraction-mesure par fraction-multiplicateur) à une multiplication interne (composition d'applications linéaires).

6.6- Suggestion 8 : Les grandeurs et les unités de référence, l'algèbre sous-jacente. Suggestion 9 : Les grandeurs et les unités conventionnelles

Aucun enseignant n'a utilisé ces suggestions. Dans l'analyse a priori, nous avions vu la place particulière de ces suggestions par rapport aux textes officiels : nous savions qu'elles ne rentraient pas dans les exigences ordinaires des classes primaires. Au collège, nous avions estimé que la suggestion 8 pouvait être traitée en recherche. La suggestion 9 nous paraissait plus difficile à situer. Les entretiens le confirment.

A l'école primaire, sept enseignants considèrent la suggestion 8 comme relevant du collège. Une personne fait le rapprochement entre les écritures fournies et la suggestion 3. Trois enseignants (dont 1 maître temporaire d'accueil) déclarent faire des activités semblables à celles de la suggestion 9, mais il n'y en avait pas trace dans les cahiers qu'ils nous ont remis.

Au collège, les objections sont plus nettes.

On ne voit pas où la suggestion 8 pourrait s'insérer en mathématiques (5 enseignants dont les deux formateurs, un enseignant en liaison avec la DEP), sauf en activités de révision (1 enseignante en liaison avec la DEP). Pourtant le traitement des unités d'aires et de volumes préoccupe trois enseignants. Une enseignante regrette l'époque où elle traitait ce genre de questions dans le cadre de l'enseignement de physique (sixième de soutien, niveau moyen).

Une seule personne (sixième, niveau fort) envisage d'utiliser la suggestion 9 en quatrième. Une enseignante (sixième, niveau faible) pense qu'elle pourrait être traitée au moment où l'on aborde les puissances de dix, en cinquième et en quatrième.

(F, 20 ans d'ancienneté, collège n° 3, sixième de soutien, niveau moyen)

> Je ne peux pas faire l'histoire des paquets de sable. Quand je faisais de la physique, parce que j'ai eu de la physique il y a quelques années, ça en physique, c'était très bien, parce qu'on avait des petites formes, avec des détails différents, et puis on avait des masses différentes, ça c'était très bien. Et ça je faisais toujours. Ça, je faisais des compléments de maths en physique.

(H, lien avec DEP, 7 ans d'ancienneté, collège n° 1, sixième, niveau moyen)

> Je suis un peu embêté pour tout ce qui concerne les grandeurs et tout ça, je ne sais pas, je ne sais jamais... bon je pense que c'est le genre de choses qui doit être en sixième... travaillé... D'un autre côté, les élèves arrivent de l'école primaire avec a priori des connaissances là-dessus, et puis, en fait, on s'aperçoit très vite que les connaissances n'en sont pas vraiment, et que en fait, je ne sais pas pourquoi, c'est... ce n'est pas..., cette histoire d'unité est un problème, et finalement un centimètre, ça ne représente pas du tout une partie de quelque chose, pour eux c'est une entité, un gramme c'est une entité. Il n'y a aucun lien justement avec ce dont on parlait, c'est-à-dire ce système de numération et ce système d'autre part d'unités pour mesurer des quantités diverses et variées, etc. Ce lien ne se fait pas à aucun moment.

(F, 16 ans d'ancienneté, lien avec la DEP, collège n° 2, sixième, niveau moyen)

> Les unités, on les aborde dès la sixième, pour les longueurs. Là aussi, on se rend compte que les élèves ont déjà du mal à mesurer, les correspondances entre les unités ce n'est pas évident, centimètre-millimètre peut-être, mais dès qu'on atteint les décimètres et mètres, et puis les masses, comme ils n'ont plus de sciences physiques, ils ne les manipulent pas. Je ne sais pas si en primaire ils les manipulent.

Nous avions traité de la même manière les longueurs, les aires, les masses, alors que, traditionnellement, ces grandeurs ne relèvent pas des mêmes disciplines : en effet, longueurs et aires sont associées à des raisonnements en mathématiques, les masses concernent l'enseignement de la physique. Bien que, dans la suggestion 8, le problème de l'unité de grandeur ait été posé en termes mathématiques et non physiques, les activités proposées ont paru étrangères aux enseignants de collège.

La suggestion 9 se situait dans le champ physique (estimation de grandeurs). Elle permettait aussi de donner du sens au passage fraction décimale <---> décimal. Le mélange des deux disciplines a-t- il rebuté les enseignants ? Doit-on y voir, comme le dit Rouche [4] (1992), une manifestation de rejet envers l'algèbre des unités de grandeurs ? Les conditions d'entretien ne nous ont pas permis de le savoir.

6.7- Suggestion 10 : Agrandissement d'un puzzle

Cette suggestion est une reprise des deux progressions de référence (B & B, D & P). Trois enseignants l'ont utilisée : un formateur d'école primaire (CM2, niveau moyen), un formateur de secondaire (cinquième, niveau fort) et une enseignante en liaison avec la DEP (sixième, niveau moyen). Ils la reprendraient une autre année, au même niveau.

(H, formateur, 12 ans d'ancienneté, école n° 8, CM2, niveau moyen)

> - Je peux le faire en CM2. "6 donne 12", ça passe bien. Mais "6 donne 9" et "6 donne 8", il y en a... 3 dans la classe qui ont eu immédiatement la perception, mais comme ils n'avaient pas la certitude, ... mais comme il y avait d'autres qui disaient : "Mais tu vois bien, on ajoute 3",
> JB- Mais l'énoncé est fait justement pour ça.
> - Évidemment alors, "mais non ça marche pas !, mais non, tu as mal fait ta forme".
> JB- Mais c'est forcé, le conflit additif/multiplicatif, l'exercice est bâti pour ça... Donc si tu n'avais pas eu d'erreur, c'est que quelqu'un leur aurait filé la solution. (rires). La question est de savoir si c'est trop élevé pour ta classe primaire ?
> - Alors "6 donne 9" et" 6 donne 8", j'ai eu beaucoup de mal. "6 donne 12", c'est passé. Après, je leur ai donné "6 donne 3", et c'est passé beaucoup plus facilement.
> JB- Ils ont quand même vu l'obstacle... de "6 donne 9" et "6 donne 8".
> - D'avoir vu "6 donne 3", ça les a aidés. Ils ont dit : "6 donne 9", on ajoute la moitié.
> JB- C'est un intermédiaire intéressant. Et pour "6 donne 8" ?
> - "6 donne 8", on est resté un peu dans le flou et on a montré qu'il y avait une fraction en fait.
> JB- Donc, l'exercice aménagé, il est bien pour un CM2.
> - Oui, il est bien, c'est une belle situation de recherche.

[4] ROUCHE, N., *Le sens de la mesure*, Didier-Hatier, 1992.

Une enseignante (CM2, niveau fort) avait utilisé l'idée d'agrandissement à propos de la suggestion 11 : elle reprendrait la suggestion 10. Les autres enseignants d'école primaire penchent pour une utilisation au collège : l'abstraction est trop élevée pour l'école primaire, le temps manque.

Au collège, cinq enseignants avaient utilisé autrefois cette situation en cinquième. Six enseignants (dont le formateur de sixième et les deux enseignants en lien avec la DEP) pensent que la suggestion 10 est utilisable soit en sixième soit en cinquième. Deux enseignantes (sixièmes, niveaux moyen et fort) la situent plutôt en quatrième et l'une d'entre elles (sixième, niveau moyen) la réutiliserait à ce niveau. Trois enseignants posent la question de l'emploi du produit de fractions : "Je n'ai jamais osé", "Il y a un saut".

(F, 26 ans d'ancienneté, collège n° 2, sixième, niveau faible)

> Oui, en cinquième, on pourrait le refaire aussi en quatrième. .. Mais,... quand je l'avais fait, l'année où je l'avais fait avec un groupe 1 [niveau très faible] de cinquième, c'est un exercice qui avait été proposé justement dans le sujet de la proportionnalité, avec Régine Douady qui l'avait introduit, il y a un groupe, passer de 4 à 8, ça c'était facile, on multiplie par 2, pas de problème. De 4 à 7, tout de suite, on ajoute 3. Ils s'aperçoivent que ça ne va pas, mais oui, quand ils se sont aperçus que ça... les morceaux ne... ah, c'est peut-être que j'ai mal coupé ! ou parce que je n'ai pas fait le tracé avec assez de précision, ils ne remettaient pas en question tout systématiquement leur calcul, même quand c'était important leur différence et on leur disait "Ce n'est pas seulement une erreur de tracé". Un groupe avait fini par trouver et après, avait compris pour le reste, mais il y en a d'autres qui sont partis sans avoir compris.

(F, 19 ans d'ancienneté, collège n° 2, sixième, niveau faible)

> Ça, c'est difficile. Bon, en sixième, moi je l'avais fait il y a quelques années en cinquième, mais bon, suivant ce qu'on prend... mais par contre à l'époque on nous présentait ça comme une introduction à la proportionnalité et je ne voyais pas pourquoi c'était une aide à la proportionnalité, parce que bon, finalement, les élèves arrivaient à les faire, mais, on leur disait : c'est une situation de proportionnalité parce qu'il y a multiplication, mais après, leur montrer que ça a le même rapport que l'histoire des francs et des prix au kilo, une chose comme ça, je ne sais pas si un élève arrive à faire le rapprochement entre le puzzle et ... (rires). Vous, vous l'avez présenté en disant : on multiplie et ça n'agrandit pas toujours, et ça, ça me paraît plus intéressant.

(H, lien avec DEP, 7 ans d'ancienneté, collège n° 1, sixième, niveau moyen)

> - La 10, c'est une activité que je mène essentiellement plutôt en cinquième.
> JB- Aussi la partie décimale que la partie fraction qui est au verso ?
> - Tout à fait. Celle-ci, je la teste tous les ans. Celle-ci je ne l'ai pas testée, mais ce genre-là, c'est parfait en cinquième. Et c'est une activité qui plaît beaucoup aux élèves.
> JB- Y compris dans cette partie-là où il y a des mesures qui sont exprimées sous forme de mesures fractionnaires ?
> - Ça, je n'ai pas encore testé, mais ça me donne de nouvelles perspectives, parce que je n'avais jamais osé.
> JB- L'idée, c'est que les opérateurs sont des fractions, mais que les mesures de grandeurs peuvent aussi être des fractions.
> - Voilà, c'est une chose que je n'avais jamais osée. L'an prochain, je la testerai. Je pense que là aussi, ça complète bien le travail justement sur les fractions, en même

temps un nombre qu'il faut savoir gérer avec les outils qu'on a mis en place, c'est ça qui m'intéresse, au fond, c'est de réinvestir tous les outils qu'on a sur les fractions en cinquième, on commence à en avoir beaucoup, pour manipuler des quantités de ce genre, je ne vois pas pourquoi on s'en priverait. Sinon on se ramène à faire de la technique bête, standard, on arrive effectivement à former des élèves qui savent additionner, multiplier des fractions, le seul problème, c'est lorsqu'on fait le contrôle commun, par exemple, à la fin de l'année, il n'y en a plus un seul qui se rappelle les règles.

Les enseignants de collège ont raison d'observer le saut que représente le produit d'une fraction-mesure par une fraction-multiplicateur. Dans quelle mesure est-il utile de désigner des agrandissements ou des réductions par des fractions-multiplicateurs ? Un des formateurs de collège l'estime utile en fin de cinquième, mais cela ne le serait plus en quatrième.

(H, formateur, 21 ans d'ancienneté, sixième, niveau fort)

JB- L'agrandissement du puzzle ?

- Ça, je ne l'ai pas fait.
JB- Est-ce que ça a sa place, où est-ce que vous le verriez ?
- En cinquième, ce n'est pas mal.
JB- Dans toutes ses variantes ? Là vous avez une première partie qui est...
- Oui, les deux...
JB- Vous avez l'agrandissement "4 donne 7", "4 donne 10", "4 donne 8", et là vous avez des agrandissements où...
- Des opérateurs.
JB- L'image... la valeur fractionnaire des images... à 7 on fait correspondre 5, donc à 1 on fait correspondre 5/7. Donc il y a un travail...
- Je le verrais quand même parce que... je trouve intéressant de faire travailler sur les fractions, c'est quand même... je ferais toute la fin en cinquième avec les fractions...
JB- Ça, c'est l'utilisation de la proportionnalité, mais cette fois-ci pour laquelle l'opérateur est une fraction, mais les images aussi sont des fractions, on a un double rôle pour la fraction, la fraction qui est l'opérateur, et la fraction qui est... une grandeur...
- Ça, c'est tout à fait .... tout à fait cinquième. Diviser par 7, l'inverse...
JB- Donc ça on l'obtient en fin de cinquième... ou dans le courant de cinquième..
- Moi je trouve que c'est important de l'obtenir en cinquième. Parce qu'après, on travaille sur les fractions, mais lorsqu'on introduit en quatrième, c'est plus les écritures fractionnaires, les signes...
JB- Le calcul algébrique.
- Ceci étant, ce ne sont pas des choses très maîtrisées.

Nous nous demandons si, au collège, la préoccupation dominante pour le calcul algébrique est compatible avec l'enrichissement des situations arithmétiques de l'école primaire, comme l'agrandissement du puzzle.

6.8- Suggestion 11 : Calculer, fabriquer, mesurer

Cette suggestion est la reprise d'une situation de B & B.

Une seule enseignante (CM2, niveau fort) l'a utilisée. Elle nous a remis un compte rendu écrit, dont nous extrayons quelques lignes.

Les enfants ont tous compris qu'il s'agissait de trouver une règle de passage entre les nombres de la première liste (mesures de la figure de base) et les nombres de la seconde liste (mesures de la figure agrandie) mais ils ont cherché à évaluer une différence entre ces nombres plutôt que leur rapport. Les deux autres groupes ayant choisi la fonction m 1,5 ont, eux aussi, émis l'hypothèse d'une fonction additive et ils n'ont pas su dire pourquoi ils l'écartaient. (...)
Les enfants n'ont pas retenu que seule la fonction "multiplier" permet un agrandissement normal et régulier de la figure de base, la forme étant conservée. La notion de proportionnalité sera donc reprise (...) et approfondie. Un retour sur l'agrandissement et la réduction de figures s'avère nécessaire puisque l'assimilation n'est pas faite. (...)
Quelques enfants font davantage confiance aux valeurs calculées (ils les ont recopiées quand les mesures sur le dessin semblaient s'en approcher) ; d'autres, aux mesures directes (ils ont pensé qu'ils s'étaient trompés dans leurs calculs), d'autres ont réellement cru qu'il existait obligatoirement une parfaite correspondance entre les deux et qu'il fallait donc les écrire au centième près (...). Ce n'est qu'au moment du bilan que le conflit entre calcul et mesure est réellement apparu, les enfants ayant des avis différents. (...)
L'exercice de renforcement collectif a permis de mettre à jour le problème du rapport non décimal entre deux mesures (valeur exacte et valeur mesurée directement) qui provoque justement l'augmentation des erreurs lorsque l'on agrandit une figure.
Conclusion : l'emploi de l'écriture fractionnaire de la fonction multiplicative prévaut sur les autres écritures lorsque la fraction n'est pas égale à un nombre décimal.
Pour faire aboutir la découverte, cet exercice de renforcement (proposant un deuxième agrandissement de la figure) semble aussi important que le travail réalisé en premier. Quoique plus complexe, il pose les vrais problèmes. Faut-il pour autant insister auprès des élèves de CM2 ? Ce serait sans doute trop ambitieux. Mais la suggestion 11 demeure riche et intéressante.

C'est exactement ce que nous attendions... de la part d'enseignants de collège, puisque nous considérions cette suggestion comme trop difficile pour l'école primaire. Or aucun enseignant du second degré n'a utilisé la suggestion.

Sept enseignants de collège déclarent la suggestion faisable en collège (sixième, cinquième ou quatrième), mais avec hésitation. Un enseignant en liaison avec la direction de l'évaluation et de la prospective (DEP) pense qu'il suffit d'étudier les arrondis dans un cadre numérique. Un formateur l'estime faisable en sixième et cinquième tout en s'interrogeant sur son utilité, l'autre formateur ne voit pas sa place au collège. Aucun enseignant n'envisage de l'utiliser l'année suivante.

Nous savions que la suggestion 11 ne pouvait être adoptée au collège que dans le cadre d'activités de recherche. Les différentes approximations, physiques (mesure directe) ou mathématiques (remplacement d'un rationnel par un décimal), y intervenaient comme outils dans une résolution de problème. Aucun enseignant de collège n'y a fait allusion. Il nous semble que leurs réponses constituent une sorte de refus.

6.9- Suggestion 12 : Fonction numérique et valeur approchée

La suggestion 12 reprend dans son intégralité le plan d'étude de D & P, qui établit le produit de fractions et introduit les décimaux comme solution approchée d'une équation. Nous y avions adjoint une première partie de rappels sur la graduation d'une demi-droite. Cette suggestion ne pouvait être utilisée que dans l'enseignement secondaire.

Les deux formateurs sont les seuls à l'avoir utilisée. Un seul déclare qu'il la réutiliserait l'année suivante.

- J'ai utilisé là, la partie 1, je vous l'avais dit, pour retrouver les graduations, en sixième.
JB- Vous l'avez fait en sixième !
- Oui, je me suis intéressé à ça en sixième, représenter sur la demi-droite l'arrondi..., travailler sur les arrondis, retrouver sur la droite la graduation. C'est important ça, je crois que c'est extrêmement important, parce qu'on ne prête pas forcément attention, la graduation n'est pas forcément... (silence), ce choix des unités.
JB- Donc cette partie-là, elle a sa place dans l'esprit actuel des programmes, sans difficulté.
- Et l'exercice est intéressant, qu'on ne voit pas, qu'on ne rencontre pas, ou rarement.
JB- Qui enrichit le stock des exercices que vous avez, c'est ça ?
- Oui.
JB- Et qu'est-ce qui est nouveau là-dedans, je croyais que cet exercice-là était déjà...
- On le trouve, mais pas ... tellement, c'est souvent la plupart du temps, O l'origine est déjà précisée, à la limite on demande la graduation, mais pas tellement plus.
JB- Tandis que là, le fait que 7 et 17 soient indiqués et que là et là, il y a des points de suspension.. .
- Il manque l'origine. Alors que le zéro, il y est la plupart du temps. Par contre, on met le zéro et on va demander quelle est l'unité. Je vois plus ça, souvent.
JB- C'est vrai, c'est plus souvent pris sous ce sens-là, et c'est vrai que je n'avais pas vu beaucoup... de mettre des arrondis avec des nombres... pour lesquels il y avait pas mal de chiffres au-delà de la virgule.
- C'est le côté intéressant aussi du nombre d'or. J'avais demandé aussi à des élèves de troisième, parce que eux ils mettent toujours 0, 1, ils ont tellement l'habitude, et après ils ne s'en occupent plus, c'est le problème de graduation.
JB- Et ça marche bien en troisième ?
- Moyennement, ils ont beaucoup de mal.
JB- Ce qui veut dire que les problèmes de proportionnalité sous-jacente ne sont pas..
- Ne sont pas du tout...
JB- Ne sont pas aussi évidents que ça.
- Alors que ça marche très bien dans le sens... ils font mécaniquement, direct...
JB- Donc là ça suppose.. effectivement, il y a tout un travail de proportionnalité...
- Il y a un travail important, et c'est là aussi je crois qu'il y en a qui ont eu des difficultés par exemple avec le taux d'accroissement, qui est indépendant. Lire le taux d'accroissement, que l'origine soit n'importe où, on s'en fiche. Et ça quelque part, je crois que ce genre d'exercices peut les préparer à mieux lire, sur un graphique, c'est la proportionnalité en fait.
JB- C'est la proportionnalité, mais vue du point de vue de l'accroissement, comme vous dites, et pas par rapport au zéro. Et les autres parties ?
- Non, je n'ai pas fait. Ça, c'est pour la cinquième. La partie 1 en sixième et la

partie 2 est plutôt cinquième. C'est comme ça que j'introduis le produit des fractions.
JB- La fin ?
- Je fais quelquefois des choses du même type, des fois, en sixième, des fois je ne le fais pas.
JB- Calcul de périmètres et d'aires...
- Calcul d'aires quand le périmètre est donné, faire construire des choses, comme ça, mais je ne le fais pas toujours (silence).

Les autres enseignants du second degré disent peu de choses de cette suggestion. Ils déclarent qu'elle est utilisable en cinquième (3 fois), quatrième (3 fois) et troisième (1 fois), sans commentaires. Aucun ne l'utiliserait lui-même.

La suggestion fournissait un plan d'ensemble, qui supposait une succession de séquences d'enseignement. Est-ce la longueur qui a dérouté, ou l'usage non classique des graphiques ou la désignation d'aires par des rationnels ? Les entretiens avec les deux utilisateurs n'ont pas permis de le savoir.

6.10- Ce que disent les enseignants des difficultés d'enseignement des décimaux

Au cours des entretiens, les enseignants ont parlé de leurs difficultés à enseigner les décimaux. Il nous a semblé intéressant de prendre en compte leur point de vue dans l'interprétation de ce qu'ils avaient repris des suggestions.

Nous avons déjà relevé ci-dessus la numération des entiers, l'interprétation des zéros inutiles dans l'écriture décimale des grandeurs familières, l'addition répétée comme obstacle à l'introduction de la multiplication des décimaux. D'autres difficultés sont bien connues et décrites avec détail.

Tout d'abord, citons le statut des écritures algébriques.

(H, lien avec DEP, 7 ans d'ancienneté, collège n° 1, sixième, niveau moyen, entretien en cours d'année)

Le... le premier obstacle, pour eux, une opération, ça implique un résultat exact, systématiquement, ce qu'ils appellent "le" résultat de l'opération. La difficulté pour eux, et à mon avis c'est aussi un des grands manques de l'école primaire, c'est de comprendre que 3 + 5, n'importe quoi, une écriture additive, c'est un nombre, qu'on peut à la limite utiliser tel quel si on n'a pas besoin de l'écrire 8 ou autre chose. Alors que pour eux, quand on écrit 3 + 5, c'est une addition. (...)
Ces histoires 1 dixième, c'est 1 sur 10, c'est les notations qui vont remplacer petit à petit la vision purement décimale des nombres, donc nouvelle écriture de nombres sous forme nouvelle de quotients, et ça j'insiste beaucoup en disant que c'est bien le même nombre à chaque fois, sauf que là on va peut-être créer de nouveaux nombres, ça c'est important, et donc le travail sur la division euclidienne.
Ce qui est important, c'est de bien comprendre cette histoire d'écriture, et de montrer qu'un quotient, ça a parfois une écriture décimale, parfois non. Finalement, il y a des nombres, des nombres ... ben nouveaux, qu'on ne peut écrire autrement si on veut les écrire.

Les règles des entiers sont abusivement transférées aux décimaux.

(H, formateur, 12 ans d'ancienneté, école n° 8, CM2, niveau moyen)

> (...) l'aspect numération, purement numération. décomposition, placer... enfin, c'est difficile quand je dirais quand on a fait les décimaux... Je ne dirais pas pour moi que c'était la partie la plus difficile, parce qu'il y a une rigueur que j'ai imposée, étant resté très longtemps sur la numération entière, il y a une rigueur par rapport au tableau de numération que j'ai imposée aux élèves. Du coup, par rapport à la numération décimale, ils se sont rendu compte rapidement de leurs erreurs par rapport à la rigueur que j'avais imposée auparavant. Mais si on n'a pas imposé cette rigueur, le problème des zéros intercalés, c'est-à-dire euh 3 virgule 07 est plus petit que 3 virgule 1, cette difficulté-là, il y a vraiment des enfants, ça ne peut pas rentrer.

(H, 10 ans d'ancienneté, école n° 9, CM2, niveau moyen, entretien en cours d'année avec ses collègues)

> - Dans l'abord des décimaux, ce qui me semble aussi difficile, j'en profite, de vous voir, de passer des mécanismes qu'on met en place dès les petites classes, pour multiplier par 10, 100, 1000, on ajoute 1, 2, 3 zéros, pour diviser par 10, 100, 1000, on retire 1, 2, 3 zéros, et lorsqu'on entre dans les décimaux, ça disparaît.
> JB- Et effectivement, ça fait des 2,3 x 10 = 20,3 ou 2,30, au choix.
> - Voilà. Je pense qu'au niveau des exercices proposés, il y aurait tout un travail sur ce .... qui semblerait intéressant. parce qu'on change de valeur, totalement. D'ailleurs, je leur dis, dès qu'on est au CM2, "écoutez, ajouter 1 zéro, c'est terminé, il ne faut plus parler de ça, on va utiliser un autre instrument, on a la virgule, il faut sortir de cela, parce que..."
> JB- Ça crée un obstacle.
> - Ça crée un obstacle. Vous savez, un peu parfois, quand on a des petites recettes, on marche souvent à l'école primaire avec des recettes, et on se rend compte que parfois les recettes ont leurs limites, parce que quand on doit aborder une notion nouvelle il faut d'abord se débarrasser de la petite astuce qu'on a utilisée pendant très longtemps.
> - Je m'aperçois que... en fait, c'est vrai que dans les décimaux, il n'y a absolument pas les mêmes règles de construction, de comparaison, d'ordre que dans les nombres entiers, et en fait, quand on aborde les décimaux à la suite des nombres entiers, les enfants effectivement confondent les règles. Je pense que si je le refaisais, je le reprendrais autrement. Sinon, moi les fractions, je ne les ai pas abordées, je les avais abordées en CM1 et pour l'instant on ne les a pas commencées, on l'aborde en fait... suivant en parallèle des nombres décimaux, les enfants comprennent bien, si vous voulez, que c'est la même chose.

(Professeurs en équipe, collège n° 2, sixièmes de niveaux faible ou moyen, entretien en cours d'année)

> Je crois que dans leur tête pour multiplier par 10, on ajoute un zéro et on décale la virgule, alors le zéro, soit il est mis à la fin, soit il est mis entre 25 et 2, et on décale aussi. Ça donne des résultats parfois justes, parce que quand ils mettent un zéro à la fin et qu'ils décalent la virgule, ça fait bien 252,0, mais la fois d'après, ça ne marche plus, avec 100. Ça, ils le gardent encore, mais je crois qu'ils le gardaient aussi l'année dernière aussi.

La virgule n'a pas de rapport avec la division par 10. Un nombre décimal est fait de deux nombres entiers, que les élèves traitent séparément.

(Professeurs en équipe, collège n° 2, sixièmes, niveaux faible et moyen, entretien en cours d'année)

- Oui, quand ils prennent la moitié, prendre la moitié de 17,5, c'est le moitié de 17 et la moitié de 5. ca fait 8,5 et 2,5.
JB- Ah oui, un système de deux unités, c'est un système de deux unités compatibles.
- Vous n'avez pas vu ça ?
- Non. Mais on en avait déjà parlé...
- Et puis entre le 8,5 et le 2,5, ils mettent un petit espace, parce que ça les... il y a rien, les mettre côte à côte, ça les gêne, alors ils mettent un petit espace. Ils les séparent un peu.

Ces mêmes enseignants s'interrogent sur les automatismes installés avec les fractions décimales.

D- On retrouve les mêmes types d'erreurs. (...) Par exemple 9/2 = 11. Je regarde [le] calcul suivant [du même élève] : 1/4 = 5, 3/10= 13...
G - C'est logique.[5]
D- Ah, il est très logique avec lui-même.
H- Moi, ce que j'ai trouvé, c'est 9/2 = 9,2 ; 1/4, c'est 1,4...[6]
E- Alors, moi, je me suis fâchée, parce qu'on a beaucoup travaillé avec la droite, et ils passent beaucoup au tableau, et jamais, jamais, mais vraiment, jamais en plein moment de l'activité, ils ne m'avaient sorti ça, jamais. Pourquoi au contrôle, ils me sortent ça : 9,2 ? Je ne sais pas, le trou complet ? La facilité d'écrire ça ? Encore, je l'aurais trouvé en période d'exercices, on aurait corrigé au tableau, jamais.
D- Le gamin, il a essayé de m'expliquer pourquoi il mettait 1,4. Je lui ai demandé pourquoi. Il m'a dit quand vous écrivez 2,45, c'est 245 sur 100. Alors, les nombres ils ne changent pas, il y a un 2, un 4, un 5. Alors là non plus, faut pas que ça change...
G- Ils gardent le 1 et le 4, et ils séparent par une virgule.
D- Il faut laisser le 1 et le 4. parce que quand on écrit 2,45, et il écrit bien 245 centièmes, il écrit. Il me dit : j'ai gardé les mêmes chiffres, donc il faut que je les garde là. Il ne se donne pas le droit de poser la division, il faut qu'il garde le 1 et le 4. C'est la première chose qui lui vient à l'esprit...
E- La prochaine fois, il faudrait mettre des fractions décimales plus loin, parce qu'apparemment... Moi aussi, c'est pareil, la notion de division ne leur est vraiment pas venue.
D- Moi, c'est comme ça qu'il l'a vu.
E- Mais il n'aurait pas vu les fractions décimales, peut-être qu'il n'aurait pas eu cette réaction.

Les enseignants sont donc sensibles aux différents registres de calcul que représentent les différents ensembles de nombres. La coordination des registres, au sens de Duval, est bien difficile à obtenir.

7- Discussion

Les enseignants avec qui nous avons travaillé ne constituent pas un groupe représentatif. Néanmoins, nous pouvons dégager quelques caractéristiques de leurs réponses.

Nous reviendrons ensuite sur les hypothèses que nous avions émises à la fin du chapitre III sur le réemploi "spontané" des progressions de référence.

[5] L'élève ajoute le numérateur et le dénominateur.

[6] L'élève juxtapose le numérateur et le dénominateur en le séparant avec une virgule. Cet élève et le précédent utilisent un algorithme rapide, non relié aux autres propriétés des nombres.

7.1- Retour sur les caractéristiques professionnelles des enseignants

Nous avions fait l'hypothèse d'attitudes différentes entre les enseignants du primaire et ceux du secondaire. Les enseignants du primaire ont eu, dans l'ensemble, moins de difficulté que leurs collègues du secondaire à "rentrer" dans la lecture des suggestions.

Sur les douze suggestions, seules huit d'entre elles étaient faisables à l'école primaire, au besoin en activité de recherche. Les enseignants de collège pouvaient les reprendre toutes, en activité de recherche ou en révision. En fait, à l'école primaire comme au collège, chaque enseignant a limité le nombre de suggestions reprises, quelques enseignants d'école primaire s'autorisant à ne rien reprendre. Nous avons la confirmation que les innovations spontanées portent sur des domaines limités.

Nous avons souvent différencié les choix des enseignants selon qu'ils étaient formateurs, en lien avec la Direction de l'Évaluation et de la Prospective, ou "ordinaires". Cela ne nous paraît pas fortuit : les premiers (formateurs, enseignants en lien avec la DEP) disposent de stimulations extérieures au cadre de la classe qui les rendent plus réceptifs à des innovations. Leur avis n'était cependant pas toujours convergent. Pour les formateurs du secondaire, il se pourrait que le niveau fort de leurs élèves ait eu une influence sur leur jugement.

7.2- Retour sur les hypothèses du chapitre III

Nous avions émis des hypothèses sur la possibilité que des enseignants reprennent "spontanément" des éléments des progressions de référence. Nous disposons de quelques réponses partielles.

Nous avions fait l'hypothèse de *reprises limitées.* Chaque enseignant a effectivement repris, en partie le plus souvent, un nombre limité de suggestions. Le nombre maximum de suggestions reprises est cinq, nombre atteint par un formateur exerçant en CM2. Le nombre moyen est 3. Nous avons donc la confirmation que les enseignants modifient peu leur plan de cours.

Nous avions estimé que certaines suggestions pouvaient être utilisées dans le cadre des programmes au moins à titre de *problème de recherche.* En sixième et cinquième, cela a été très peu le cas. Nous pensons que les choix des enseignants ont été influencés par le niveau de leur classes. L'horaire limité en collège empêche toute fantaisie qui ferait déborder du programme, sauf avec des élèves faibles quand rien d'autre n'a fonctionné.

En ce qui concerne *les méthodes pédagogiques,* une seule enseignante (sixième de soutien, niveau moyen) a manifesté son opposition aux propositions de jeux et aux travaux de groupe. Elle n'a utilisé de suggestions que dans le cadre des demi-groupes. Un enseignant (formateur, CM2, niveau moyen) a fait allusion à du chahut à propos du jeu "Tu chauffes, tu brûles" (suggestion 1). Les autres enseignants n'ont fait aucun commentaire sur les dispositifs pédagogiques proposés dans les suggestions. Comme les méthodes de nos suggestions font partie des discours innovants, il est possible que les enseignants n'aient pas osé exprimer leurs doutes.

Nous avions remarqué le rôle important de certaines *représentations sémiotiques* : schémas avec flèches pour B & B, utilisation de graphiques pour D & P. Nous n'en avons eu aucun commentaire.

Nous ne savons pas dans quelle mesure ces représentations ont joué dans le rejet ou l'adoption des suggestions 10 (3 utilisateurs) et 12 (2 utilisateurs).

Un seul enseignant (formateur de secondaire) souligne l'importance de la proportionnalité dans la graduation d'une demi-droite. Pourtant, d'autres enseignants remarquent la faiblesse de certaines productions d'élèves, quand ils doivent travailler avec la droite numérique. Cela nous paraît constituer un "point-aveugle" de l'enseignement à la charnière école-collège.

La progression B & B s'appuyait sur des *manipulations effectives de grandeurs physiques* (longueurs, aires, masses). Celle de D & P se limitait aux longueurs et aux aires. Les enseignants ont repris ce qui était "classique" : un usage mathématique de nombres associés à des longueurs ou à des aires. Les rapports entre unité de grandeurs, nombres et grandeurs leur ont paru hors sujet (suggestions 8 et 11). Pourtant l'algèbre des unités de grandeurs facilite les calculs de conversion d'unités et pourrait préparer aussi bien le calcul algébrique que la conversion décimal <---> fraction.

Nous avions vu que les deux progressions de référence *s'écartaient des programmes officiels,* en introduisant les rationnels avant les décimaux, comme codage de mesures.

A l'école primaire, ce n'est pas ressenti comme un écart, mais comme un choix : certains choisissent de traiter décimaux avant fractions, d'autres faisant l'inverse. D'ailleurs, cinq enseignants ont utilisé la suggestion 3.

Au collège, certains enseignants seraient prêts à utiliser les fractions-mesures à l'occasion de révisions. Il nous semble que, dans les programmes officiels, la référence aux problèmes "concrets" donnant du sens aux opérations pourrait légitimer l'emploi de fractions-mesures dans les premières années de collège. D'ailleurs, les enseignants de collège nous ont paru très ouverts aux questions de modélisation (suggestions 6 et 7). Cette ouverture risque néanmoins d'être neutralisée par leur centration sur les propriétés algébriques des opérations arithmétiques : ils considèrent les problèmes comme équivalents chaque fois qu'ils sont modélisés par la même opération arithmétique. En conséquence, nous ne sommes pas sûre qu'ils seraient prêts à accepter l'évolution des sens associés à la multiplication de rationnels : de la multiplication externe de rationnels (fraction-mesure par fraction-multiplicateur) à leur multiplication interne (composition d'applications linéaires).

Si les fractions-mesures semblent pouvoir être acceptées, il n'en est pas de même pour *la liaison entre ordre et addition,* avec utilisation de la demi-droite numérique, en sixième et en cinquième. Les seuls enseignants qui seraient prêts à utiliser les suggestions 4 et 5 sont des formateurs ou des enseignants en lien avec la DEP. Or d'une part, la liaison entre ordre et addition est indispensable pour comprendre le fonctionnement de l'algorithme habituel de la division (à la main) ; d'autre part, sans densité des fractions décimales, il n'y a pas de résolution possible de problème d'approximation de nombre réel.

La maîtrise des *arrondis* liés à la vie quotidienne (suggestion 2, partie multiplicative) est acceptée par certains enseignants de collège, jugée inutile par d'autres. Le mot *approximation* est lié aux questions de calcul approché," en gros". Il n'est pas associé à l'enrichissement des ensembles de nombres.

Sans pratiques de calculs d'écart, sans représentations associées sur une demi-droite numérique, sans maîtrise mathématique des approximations, il n'est pas possible de donner du sens à la progression D & P, dont le ressort essentiel est la densité des décimaux dans l'ensemble des réels.

En conclusion, l'étude expérimentale nous paraît confirmer ce que nous avions observé à propos des manuels dont les auteurs étaient proches de la didactique : il y a effectivement reprise des certains éléments issus des progressions de référence, mais cette reprise se fait par petites touches, avec des zones de contradiction.

Une reprise plus complète de la progression B& B nous paraît dépendre de la possibilité de manipuler à la fois des fractions-mesures et des fractions-multiplicateurs. Certains enseignants avec qui nous avons travaillé nous semblent ouverts à cette perspective, à partir de la fin de cinquième. Une condition serait à assurer : "le sens" d'une opération ne peut plus être unique.

Une reprise plus complète de la progression D & P nous paraît beaucoup plus difficile : le malentendu sur l'approximation, l'absence de liaison entre l'ordre et l'addition, empêchent que l'enrichissement des ensembles de nombres soit fondé sur une pédagogie de résolution de problèmes. Tout se passe comme si les enseignants n'avaient pas besoin de l'existence des nombres réels pour faire du calcul algébrique.

CONCLUSION

Au terme de cette étude, il nous revient de faire le point sur les apports et les limites de notre travail, les perspectives de recherche qu'il ouvre, les innovations qui nous paraissent souhaitables pour le système éducatif français.

1- Bilan de l'étude

Notre propos était de considérer l'enseignement des décimaux dans les pratiques scolaires et de voir quels effets ont pu y produire la diffusion des recherches en didactique des mathématiques. Il s'agissait donc d'apprécier ces retombées possibles non dans des classes où des enseignants volontaires expérimentent de nouveaux protocoles en liaison avec des chercheurs, mais dans des classes tout venant, dans lesquelles les enseignants, instituteurs ou professeurs, n'ont pas eu d'information ou de formation particulière sur le sujet. Les classes désignées traditionnellement comme "expérimentales" de l'enquête sont donc plutôt des classes "témoins", non au sens que l'on donne à ce terme en psychologie expérimentale, mais dans un sens plutôt sociologique : elles témoignent de la réalité didactique ordinaire et de la flexibilité de leurs enseignants à réagir à des propositions ponctuelles, dans des situations contrastées. Or, si la question générale du passage de la recherche à la pratique est un thème abondamment débattu, peu d'études ont paru sur les pratiques d'enseignement ordinaires dans des domaines précis. Pour ce qui est des mathématiques, plusieurs équipes mènent actuellement des recherches dans ce sens. Notre étude se veut une contribution à ce champ de recherche, encore largement inexploré et doit donc être discutée tant au plan méthodologique qu'en ce qui concerne les résultats.

1.1- Bilan méthodologique

Notre méthodologie a conjugué trois types d'analyses : une rétrospective historique, une analyse des progressions de ingénieries didactiques et de certains manuels actuellement en usage, enfin une analyse indirecte de pratiques dans les classes.

L'étude historique des textes officiels prescriptifs sur le sujet s'en est tenue à une analyse interne. En effet, nous ne disposions pas des outils nécessaires pour situer les changements de programmes officiels dans le contexte des débats de l'époque (associations professionnelles, syndicats, mouvements pédagogiques, etc.). De même, il n'existe encore aucun répertoire d'ensemble des manuels[1] et des écrits à caractère officiel ou semi-officiel (articles de l'inspection générale, préfaces de manuels, etc.), comme c'est par exemple le cas pour l'enseignement du

[1] La banque de données *Emmanuel*, en cours de constitution au Service d'histoire de l'éducation de l'Institut national de recherche pédagogique (SHE/INRP), n'a pas encore traité les manuels d'arithmétique ou de mathématiques.

français, qui nous auraient permis de saisir les aspects ressentis comme problématiques ou difficiles à traiter dans la réalité des classes à un moment donné [2]. Cependant, le seul examen des permanences et variations dans les textes de programmes et commentaires nous a permis de mettre trois points en évidence : tout d'abord, une préoccupation permanente pour le calcul algébrique ; ensuite, la récurrence des hésitations sur la place qu'il faut accorder au traitement des fractions par rapport aux décimaux : enfin, des incertitudes non réglées sur la façon de traiter pédagogiquement la multiplication et la division des décimaux.

L'étude des progressions de référence et des manuels s'est appuyée sur les outils d'analyse de la didactique des mathématiques. Nous avons limité le nombre d'ouvrages étudiés à ceux dont les auteurs ont manifesté le souci de se placer dans la perspective des recherches en didactique, sans tenir compte de la diffusion de ces manuels dans le marché pédagogique (probablement inégale). Pour beaucoup d'enseignants, les manuels constituent les outils ordinaires par lesquels se diffusent des innovations, quand ils ne bénéficient pas de relais institutionnels directs (stages de formation, participation à des équipes de recherche, université d'été etc.). Cette analyse nous a permis de mettre en évidence des zones de souplesse dans l'édition scolaire, puisque les auteurs ont proposé des mises en œuvre variées. Nous en avons induit des zones de souplesse dans le système éducatif lui-même.

La *population expérimentale* avec laquelle nous avons travaillé a été recrutée sur la base du volontariat et de la proximité. Elle ne peut donc prétendre à être représentative du milieu enseignant. Cependant par la variété des lieux et l'éventail des enseignants, nous pensons avoir neutralisé un certain nombre de biais qui risquent toujours d'entacher de suspicion les études menées sur des échantillons d'élèves issus d'une ou deux classes seulement. Concernant l'effet-maître, nous avons fait émerger certaines variables pertinentes, dont la plus patente est l'insertion dans les dispositifs de formation : les choix pédagogiques des formateurs, qu'ils soient du premier ou du second degré, se distinguent qualitativement de ceux de leurs collègues.

La méthodologie la plus complexe à élaborer a été celle qui concerne les mises en œuvre pédagogiques. Il fallait trouver un dispositif qui autorise des comparaisons entre les enseignants mais ne se contente pas de tester des déclarations d'intention pédagogique ou l'expression d'opinions. Des observations de classe, utiles à des fins d'échange d'information sur les situations locales, outre qu'elles étaient trop coûteuses en temps, avaient l'inconvénient de ne pas permettre de comparaison commode. Nous avons donc eu recours à un détour. En proposant aux enseignants des suggestions, *sans obligation pour eux* de les employer (en totalité ou en partie), nous avons cherché à fabriquer une sorte de test d'acceptabilité : selon les cas, les enseignants (qui étaient volontaires pour participer à ce dispositif et donc a priori ouverts à des innovations) pouvaient être conduits à ne pas tenir compte de ces suggestions pour des raisons diverses : difficulté à comprendre les tenants et aboutissants d'une suggestion, difficulté à l'insérer dans la progression en cours, manque de temps ou manque de sécurité pour le faire, doute sur le bien-fondé de la suggestion pour leurs élèves. Quel qu'ait pu être le motif ressenti, il permettait de faire émerger les raisons qui fondaient les choix des enseignants. Inversement, l'acceptation d'une suggestion prouvait qu'elle était perçue comme compatible ou cohérente avec la progression adoptée et possible ou facile à mettre en oeuvre immédiatement, sans surcoût de travail démesuré.

2 Bruno Belhoste (SHE/INRP) qui est responsable de l'édition du recueil des textes officiels concernant les mathématiques, nous a permis de consulter le répertoire qu'il est en train d'achever.

Les enseignants sont plus diserts sur ce qu'ils ont repris ou adapté que sur ce qu'ils ont rejeté. En effet, le commentaire sur les choses faites peut prendre sans peine la forme d'un récit (décrire ce qui s'est passé, comment les choses ont été faites et comment les élèves ont réagi), récit entremêlé d'arguments justificatifs (sur l'intérêt de la suggestion, les raisons des modifications ou adaptations apportées, sur les résultats escomptés et obtenus etc.). En revanche, justifier un rejet ne peut se faire que dans un discours argumentatif, qui exige une explicitation préalable des raisons du refus sur le plan théorique et pas seulement pratique (par exemple, "je n'avais pas le temps" peut ne pas être ressenti comme un argument recevable). Or il est difficile d'assumer une position de rejet à l'égard de suggestions dont on sait qu'elles ont été fournies par l'interlocuteur et qu'il pourrait l'interpréter comme un geste critique à l'égard de son travail ou discourtois à son égard. Une pré-expérimentation était donc nécessaire (elle s'est limitée pour nous à 7 suggestions). Nous pensons avoir fourni une démarche méthodologique intéressante, car sa gestion technique est légère et qu'elle permet de recueillir des résultats à la fois quantitatifs et qualitatifs sur les pratiques pédagogiques telles que les maîtres les conduisent et les présentent spontanément.

La *rédaction des suggestions* est le point le plus délicat de notre méthodologie. C'est pourtant un point essentiel, puisqu'il était impossible de reprendre les progressions de référence dans leur totalité. Les contraintes en sont fortes :
- il nous fallait sélectionner certains thèmes des deux progressions ; les thèmes retenus devaient constituer un ensemble suffisamment représentatif de chacune des deux progressions,
- il nous fallait remettre un nombre limité de suggestions aux enseignants associés à l'expérimentation ; sinon l'abondance de documentation risquait de les décourager avant même qu'ils n'entrent dans leur lecture,
- ces deux contraintes contradictoires nous ont conduit à rédiger des suggestions dans un style assez condensé, qui a pu accentuer le caractère non familier de certaines situations.

Nous avons choisi de *ne pas assurer de suivi de formation* pour les enseignants associés à l'expérimentation, nous limitant à répondre à leurs questions. D'autres choix auraient été possibles : citons, par exemple, la recherche en cours de Catherine Aurand, Christiane Larère et Danielle Vergnes, qui incorpore au contraire des séances de formation continue au protocole expérimental. On voit bien les avantages de ce dispositif, qui privilégie une démarche de type "innovation contrôlée". Quand le processus de formation s'étale sur une période suffisamment longue (de l'ordre de l'année), les discussions avec les enseignants réunis en groupe, les échanges qu'ils peuvent avoir entre eux, constituent des leviers efficaces pour forger un langage commun, pour rapprocher les progressions, homogénéiser les pratiques, légitimer les choix didactiques. En revanche, de telles interventions agissent simultanément sur les savoirs de référence, les conceptions didactiques et les conduites pédagogiques [3]. On peut tirer de là des conclusions sur les effets d'un accompagnement dans un cadre d'innovation. On ne peut en revanche en tirer d'information sur ce qui constitue les obstacles habituels à la diffusion d'innovations en dehors des équipes accompagnées par des chercheurs. Quels que soient les choix faits, l'étude du passage entre les recherches en didactique des mathématiques et les pratiques ordinaires suppose une *médiation* (et donc des médiateurs) qui a des effets de filtre dont il faut tenir compte dans l'interprétation des résultats.

3 Toutes les "recherches-actions" conduisent à de telles modifications, sans qu'il soit possibile de conclure à leur reproductibilité en l'absence de soutien d'une équipe de recherche. Elles sont "exemplaires", mais elles ne démontrent pas la supériorité intrinsèque de la démarche didactique choisie.

Malgré ces limites, notre étude a fait émerger des interrogations convergentes sur le fonctionnement de l'enseignement mathématique à la charnière école-collège, qui nous paraissent expliquer, dans une large mesure, le peu de reprise des situations des progressions de référence.

1.2- La réponse à la question de départ

Il nous paraît que les enseignants des classes ordinaires manquent de points d'ancrage pour utiliser les situations des progressions de référence.

La fraction-multiplicateur est proche du quotient de décimaux, on serait tenté de dire que la progression B & B trouve ici un point d'ancrage. Nous avons repéré un obstacle à sa reprise. Dans la progression B & B, la fraction désigne successivement une mesure de grandeur, puis une application linéaire. La multiplication des rationnels est d'abord externe (application linéaire opérant sur une mesure), puis interne (composition d'applications) : le sens de la multiplication de rationnels s'enrichit avec la résolution de nouveaux problèmes. Or, pour le milieu enseignant ordinaire, la présentation d'*un* sens suffit : on définit alors l'opération, ses propriétés algébriques, la résolution des autres types de problèmes étant conçue comme une "application du cours". Tout se passe comme si la résolution d'un type de problème devait suffire à garantir la réussite des élèves à tous les autres[4]. D'ailleurs les textes officiels se limitent à des mentions générales du genre : problèmes d'addition, de soustraction, de multiplication et de division. Une telle position nous paraît incompatible avec la reprise de la progression B & B qui fait évoluer le sens de la multiplication de rationnels.

Les enseignants semblent accepter la fraction comme mesure d'aire ou de longueur, à l'école comme au collège. Ils y trouvent une situation relativement facile à exploiter, qui fournit très vite un répertoire d'égalités et d'inégalités concernant les rationnels. Les enseignants sont prêts, sur ce sujet, à déborder le cadre des textes officiels régissant l'enseignement. D'autre part, les enseignants de collège connaissent la situation d'agrandissement du puzzle. On serait donc tenté de dire que la progression D & P pourrait être reprise. En dépit de l'existence de ces situations d'ancrage, la progression D & P nous paraît, par la suite, très éloignée des pratiques ordinaires des classes. En effet, elle s'articule autour de l'approximation de nombres réels par des fractions décimales. Les tests que nous avons fait passer aux élèves montrent que les taux de réussite aux items portant sur la notion d'écart sont beaucoup plus faibles que ceux portant sur l'additivité des longueurs [5]. Or cette notion, qui suppose un travail de liaison entre ordre et addition, est le plus souvent absente des manuels et des commentaires des enseignants. Pire, dans les pratiques ordinaires, l'expression "approximation" a un sens absolu : un calcul est approché si l'utilisateur ne se soucie pas de sa précision, si le calcul est fait "en gros". Or la progression D & P repose sur le sens relatif de l'expression : telle fraction décimale est plus proche de tel nombre que telle autre.

Pour reprendre une formulation que nous avons utilisée au chapitre I, *la notion topologique d'approximation n'est pas légitime dans le milieu enseignant.* Nous nous demandons même si l'enrichissement des ensembles de nombres par la résolution de problèmes pourrait être légitime à leurs yeux. Cela nous paraît aller contre la tradition presque séculaire des calculs automatiques de

[4] La majorité des manuels de l'école élémentaire repose sur cette conception. Nous l'avons vérifié à propos de l'addition et la soustraction des entiers (étude non publiée).

[5] Voir en annexe l'analyse des réponses aux tests de septembre 1994 et de juin 1995.

conversion décimal <-----> fraction décimale, et la focalisation sur les techniques algébriques de calcul. Pourtant, les enseignants connaissent les limites de l'enseignement des calculs de routine : l'une ou l'autre des progressions de référence permettrait justement de coordonner les registres de représentation de nombres. Ce serait prendre au sérieux la recommandation de développer la résolution de problèmes. Mais le type de "leçons" que cela suppose est-il facile à conduire pour un enseignant ?

Les deux progressions de référence proposent des situations riches, complexes, dont la résolution conduit à un traitement "artisanal" qui peut être remplacé plus tard par des techniques de routine plus élaborées. Or les programmes officiels de sixième et cinquième comportent l'étude de thèmes algébriques dont l'apprentissage semble devoir être fait par la méthode des "petits pas" : par exemple, les quotients de décimaux peuvent désigner des multiplicateurs de proportionnalité qui opèrent sur des nombres décimaux, mais leur composition n'est pas inscrite au programme. Dans ces conditions, les enseignants de collège nous semblent tiraillés entre deux positions : aboutir au plus vite à des algorithmes de calcul algébrique décontextualisés, assurer une continuité avec l'école primaire en recourant à des problèmes dits concrets. On peut se demander si le processus des progressions de référence, contextualisation puis décontextualisation puis recontextualisation, est compatible avec la gestion du temps didactique des classes de collège.

Notre étude a donc permis de situer les obstacles principaux à une reprise de situations extraites des progressions de référence. Elle montre, de plus, qu'il est légitime de parler de *réappropriation* de résultats de recherche par les enseignants, plutôt que de reproductibilité des recherches. L'expression de reproductibilité garde, à nos yeux, son intérêt, si on limite son emploi au domaine de la recherche. Les ingénieries sont indispensables : elles prouvent qu'une genèse artificielle de concepts est possible chez des élèves d'un niveau scolaire donné. Mais *l'existence de ces ingénieries ne suffit pas à enclencher des processus complets d'innovation*, au sens où l'innovation porterait sur la totalité de l'ingénierie. La réappropriation globale de résultats de recherche par le système éducatif nous paraît dépendre de facteurs autres, qui seraient à élucider.

2- Perspectives pour la recherche en didactique des mathématiques

Nous avons déjà souligné le caractère largement exploratoire de notre étude concernant les rapports entre recherche en didactique et innovation dans le système éducatif. Des recherches en cours permettront de préciser ce que nous avons ébauché. Notre réflexion nous conduit à proposer quelques pistes de recherche que nous présentons brièvement.

Nous avons signalé au chapitre II *la rupture que présente l'écriture algébrique des nombres par rapport à l'écriture d'un calcul à faire*. Par exemple, les élèves qui débutent en algèbre considèrent $\sqrt{2}$ comme un calcul inachevé, alors que 1,1414... leur paraît une désignation canonique, achevée, probablement parce qu'elle permet de situer le nombre, d'avoir une idée de sa "valeur". Dans leur majorité, ces débutants en algèbre ne peuvent "travailler" sur des désignations qu'ils considèrent inachevées. Le rabattement de tous les types de nombres sur les décimaux s'accompagne d'une incapacité à traiter algébriquement des propriétés des nombres. Or 1/7 est un "calcul inachevé", c'est un nombre qui a en particulier la propriété remarquable : $7 \times 1/7 = 1$

Une ingénierie serait utile dans ce domaine. Elle pourrait démarrer dès l'école primaire en cherchant quel problème devrait être posé à des élèves pour qu'ils reconnaissent les propriétés de nombres désignés sous forme non canonique. Par exemple, quel énoncé proposer pour que des élèves détectent que 154 + 205 > 195 ou encore que 154 x 205 > 20 000 ? Une telle ingénierie pourrait être conçue dans l'optique des registres sémiotiques que propose Duval (1995).

Un autre domaine de recherche à ouvrir de nouveau serait celui des *rapports entre nombres, mesures de grandeurs, unités-étalons* dans l'esprit de ce que nous avions proposé dans notre suggestion 8. Ce domaine a fait l'objet de nombreux travaux dans la période 1960-1980 (Revuz, Colmez en particulier) dans un contexte où la logique de la déduction mathématique dominait l'approche psychologique. L'enseignement y a gagné l'indépendance entre systèmes de nombres et mesures. Il y a probablement perdu l'approche algébrique des rapports entre mesures de grandeurs, unités-étalons et nombres. Par exemple :

15 km = 15 x (1 000 m)
= (15 x 1000) m
= 15 000 m

15 g = 15 x (1/1000 g)
= (15 x 1/1000) g
= 0,015 g

Or ces propriétés "vectorielles" peuvent être mises en scène comme nous l'avons montré dans nos suggestions. Des points d'ancrage seraient à rechercher entre physique, technologie et mathématiques.

Un autre domaine de recherche concerne les rapports entre *les savoirs pratiques et les "savoirs du cours de mathématiques"*, entre le point de vue "technologique" et le point de vue mathématique. Nous avons rencontré, à propos des décimaux, plusieurs exemples où la preuve par l'action semble contredire le raisonnement mathématique. Nous avons cité le film "La boîte à problèmes", la bande vidéo "La boîte du pâtissier" [6] , nous avons rapproché cette difficulté du problème du "triangle aplati". Il nous paraît important d'exhiber, en particulier dans l'enseignement secondaire, les zones de validité de ces deux types d'approche, les différences de statut entre les objets de l'action et les objets mathématiques.

Donnons-en un exemple. On dessine un rectangle de dimensions 10 cm sur 7 cm, avec un crayon bien taillé qui permet de distinguer deux points séparés d'un demi-millimètre. Quelle est la longueur de la diagonale sur le dessin ? La réponse attendue est celle qui correspond à la précision du tracé : ce n'est pas la valeur mathématique de la diagonale $\sqrt{(149)}$.

Des ingénieries dans ce domaine seraient utiles, pour comprendre l'à-peu-près nécessaire à l'action et pour le différencier de l'à-peu-près théorique ou de l'exactitude théorique.

Une dernière piste de recherche concerne les rapports entre ingénieries et innovations. Il nous semble important de travailler sur les *situations que les enseignants ne souhaitent pas reprendre*. Nous pensons que de telles recherches supposent une méthodologie différente de celle que nous avons

6 Voir p. 145.

adoptée : nous pensons intéressant d'inclure dans les propositions d'innovations des situations d'amorçage très proches des pratiques ordinaires, d'accompagner les enseignants dans leur mise en œuvre, d'être attentif aux premiers signes de décrochage pour pouvoir définir de nouvelles situations d'amorçage. Ainsi pourrait-on avoir accès progressivement à l'organisation des conduites de l'enseignant, à ses théorèmes-en-acte et à ses concepts-en-acte.

3- Perspectives pour le système éducatif

Nous nous étions demandé comment améliorer l'enseignement des décimaux dans les conditions ordinaires de fonctionnement. Le travail que nous avons fait a permis de mettre en évidence des dysfonctionnements qui ne concernent pas seulement le champ des nombres décimaux.

Les enseignants, dans leur majorité, *classent les problèmes arithmétiques par type d'opération*, en conformité avec les textes officiels. Ils connaissent, par expérience, les difficultés de tel ou tel type de problème additif ou multiplicatif, mais ils ne traitent pas pédagogiquement cette difficulté. Or le sens des opérations n'est pas unique, l'extension du champ d'application de l'opération arithmétique ne va pas de soi chez les élèves. Les travaux publiés dans les domaines additif/soustractif[7] et multiplicatifs/"divisifs"[8] permettraient d'améliorer les progressions traditionnelles. Il serait heureux que les différents types de problèmes soient énoncés dans les instructions officielles, ce qui aurait une fonction d'alerte pour les enseignants.

A cet égard, nous nous interrogeons sur la *pertinence épistémologique* du report de la multiplication de deux décimaux de l'école primaire au collège, alors que les formules d'aire sont maintenues dans les instructions officielles pour l'école primaire ainsi que les changements d'unités d'aire. Pourquoi ne pas avoir autorisé les calculs de produits (ou quotients) à la calculatrice ? De manière symétrique, nous nous demandons à quel type de problème peut se rattacher la comparaison de fractions à l'école primaire quand l'addition de fractions de même dénominateur ne figure pas au programme, ou encore à quel type de problème peut se rattacher l'intercalation de décimaux. De même, nous nous interrogeons sur la répartition de l'étude des propriétés des quotients de décimaux entre la sixième et la cinquième. En sixième, les quotients de décimaux sont, le plus souvent, des multiplicateurs associés à la proportionnalité. Pourquoi ne pas avoir inscrit au programme de sixième, au moins de manière "artisanale" à titre de problèmes de recherche, la composition des fonctions linéaires, c'est-à-dire le produit des multiplicateurs ? Les textes officiels n'induisent-ils pas une pédagogie qui émiette les savoirs en une multitude de règles que les élèves auront du mal à connecter ensuite ?

Pour notre part, nous donnons notre préférence pour une progression qui partirait des nombres entiers, pour passer ensuite aux décimaux associés aux grandeurs familières. Les fractions nous paraissent pouvoir être introduites ensuite comme mesures de longueur et d'aire, ce qui permettrait d'établir leurs propriétés additives, de comparaison avec les entiers et d'ordre. Les deux formes de produits de fractions, celles de B & B, celles de D & P, pourraient alors être traitées. Enfin on aborderait l'étude des décimaux des mathématiciens. Mais les enseignants de sixième et cinquième, satisfaits de l'équilibre actuel, accepteraient-ils un tel bouleversement ?

---

[7] Voir synthèse dans FAYOL, M. (1990), *L'enfant et le nombre - Du comptage à la résolution de problèmes*, Paris/Neuchâtel:Delachaux et Niestlé.

[8] Les progressions de référence nous fournissent une liste de types de problèmes multiplicatifs et "divisifs".

Le domaine dans lequel une formation se révèle urgente est celui de la *mesure d'écarts*, que ce soit dans le domaine des entiers ou celui des décimaux. L'ordre des nombres est traditionnellement travaillé indépendamment de l'addition et de la soustraction, les algorithmes correspondants n'étant pas reliés. Par exemple, les élèves savent dire que 4,205 est plus petit que 4,3, mais ils ont en général des difficultés à calculer la distance numérique de 4,205 à 4,3. Peu d'entre eux savent *à la fois* calculer les écarts entre ces nombres et avoir une représentation des distances sur une graduation régulière :

$4{,}3 = 4{,}205 + 0{,}095$

$4{,}205 = 4{,}3 - 0{,}095$

4,205 est situé sur une droite graduée en dixièmes tout près de 4,2, et donc très distant de 4,3.

L'utilisation de la demi-droite numérique en tant qu'ensemble de points consacre l'indépendance des enseignements de l'ordre, de l'addition et de la soustraction. Les conséquences sont importantes pour la compréhension du fonctionnement des graduations régulières, pour la lecture et la constitution des graphiques de fonctions. A terme, c'est la notion d'intervalle qui risque d'être absente. Le déficit est profond, car installé depuis plus d'un demi-siècle (à part le "point singulier" de l'époque des "mathématiques modernes"). Un travail systématique devrait être entrepris, dès l'école primaire. Il serait important également que les textes officiels mentionnent comme objet d'étude la proportionnalité entre les écarts numériques et les distances géométriques sur une droite graduée.

Comment peut-on donner le sens *relatif* de l'approximation ? Deux voies nous paraîtraient devoir être travaillées parallèlement, en particulier au collège. Dans un souci d'éducation scientifique, il serait utile d'introduire des problèmes mettant en jeu des intervalles, y compris des intervalles emboîtés : ce serait préparer, d'assez loin, les problèmes de dérivées ou d'intégrales des classes scientifiques. Dans un souci d'éducation culturelle, il conviendrait d'entraîner les citoyens à vérifier le degré d'approximation des informations chiffrées qui leur sont données : savoir comment fonctionnent les balances automatiques des marchés, savoir détecter les pourcentages abusivement précis qui figurent dans certains sondages, savoir prévoir une marge pour une fabrication... L'approximation peut être aussi un savoir pour tous, un savoir socialement utile.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARSAC, G., BALACHEFF, N. & MANTE, M. (1992), Teacher's role and reproductibility of didactical situations, *Educational studies in mathematics, vol 23, 1*, 5-29.

ARSAC, G. & MANTE, M. (1990), Le rôle du professeur - Aspects pratiques et théoriques, reproductibilité, in *Séminaires IMAG 1988-89*, 79-105, Grenoble: Université Joseph Fourier Grenoble I.

ARSAC, G., GRÉA, J., GRENIER, D. & TIBERGHEIN, A (1995), *Différents types de savoirs et leur articulation*, Grenoble: La pensée sauvage.

ARTIGUE, M. (1990), Ingénierie didactique, *Recherches en didactique des mathématiques, vol. 9, 3*, 281-308.

BELHOSTE, B., *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, Textes présentés et annotés*, tome 2 (à paraître), Paris: INRP/Economica.

BERTHELOT, R., & SALIN, M.H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de didactique des mathématiques, Université de Bordeaux I, Bordeaux.

BESSOT, A. & EBERHARD, M. (1983), Une approche didactique des problèmes de la mesure, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol 4, 3*, 293-324.

BOLON, J. (1992), Un théorème d'existence peut-il être généralisé ?, *ZDM 93, 4*, 144-145.

BOLON, J. (1993-94), L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire, *Grand N n° 52*, 49 - 79.

BOLON, J. (1993-94), Deux fois trois est-il égal à trois fois deux ? Histoire d'un malentendu, *Grand N n° 54*, 21-25.

BRESSOUX, P. (1994), Les effets de la formation initiale et de l'expérience professionnelle des instituteurs, *Dossier Éducation et Formations n° 36*, Paris: Ministère de l'Éducation nationale, Direction de l'Évaluation et de la Prospective.

BROUSSEAU, G. (1980), Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol 1, 1*, 11-58.

BROUSSEAU, G. (1981) , Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol 2,1*, 37-128.

BROUSSEAU, G., & BROUSSEAU, N. (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Bordeaux: IREM de Bordeaux.

BRUN, J. & CONNE, F. (1988), Transcriptions et comptes rendus d'observation, in *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire, Université d'été d'Olivet* (pp. 250-272), Bordeaux: IREM de Bordeaux.

COMITI, C., & NEYRET, R. (1979), A propos des problèmes rencontrés dans l'ensemble des décimaux au cours moyen, *Grand N n° 18,* 5-20.

CONNE, F. (1995), Trois pas de deux entre savoirs et connaissances, in G. ARSAC, J. GRÉA, D. GRENIER & A. TIBERGHIEN, *Différents types de savoir et leur articulation,* (pp. 253-278), Grenoble: La pensée sauvage.

CRAHAY, M. (1989), Contraintes de situation et interactions maître-élève : changer sa manière d'enseigner, est-ce possible ?, *Revue Française de Pédagogie n° 88,* 67-94.

Département "Didactiques des disciplines" Équipe de recherche "Articulation École /Collège" (1987), *Les enseignements en CM2 et en 6ème, Ruptures et continuités,* Paris: Institut national de recherche pédagogique, Collège. Rapports de recherches n° 11.

Direction de l'évaluation et de la prospective (1992), Scénarios de développement du système éducatif 1991-200, *Éducation et formations, n° spécial juin 1992,* Paris: Ministère de l'Éducation Nationale.

Direction de l'évaluation et de la prospective & Direction des lycées et collèges (1994), *Aide à l'évaluation des élèves, Mathématiques, Cycle d'observation,* Paris: Ministère de l'Éducation nationale.

DOUADY, R. (1980), Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans), *Recherches en didactique des mathématiques Vol 1, 1,* 77-110.

DOUADY, R. (1986), Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol 7, 2,* 5-31.

DOUADY, R., & PERRIN, M.J. (1986), *Liaison école-collège : Nombres décimaux,* Paris: IREM de Paris VII.

DUVAL, R. (1991), Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des textes, *Annales de didactique et de sciences cognitives, vol. 4.*

DUVAL, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine, Représentations sémiotiques et apprentissages intellectuels,* Berne: Peter Lang.

ERMEL (1982), *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire,* CM, tome 2, Paris: Hatier.

ERMEL (1991), *Apprentissages mathématiques en 6°,* Paris: Hatier.

FAYOL, M. (1990), *L'enfant et le nombre - Du comptage à la résolution de problèmes,* Paris/Neuchâtel:Delachaux et Niestlé.

GRENIER, D. (1988), *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la sythogonale en sixième,* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble I, Grenoble.

HUBERMAN, M. (1992), De la recherche à la pratique : comment atteindre des retombées "fortes" ?, *Revue Française de Pédagogie, n° 98,* 69-82.

HUBERMAN, M. & GATHER THURLER, M. (1991), *De la recherche à la pratique - Eléments de base, Mode d'emploi,* 2 tomes, Berne: Peter Lang.

Institut de recherche sur l'enseignement mathématique de Paris VII (1987),*Situations d'apprentissage en géométrie, 6ème-5ème,* Paris: IREM de Paris VII.

ISAMBERT-JAMATI, V. (1990), La rigidité d'une institution : structure scolaire et systèmes de valeurs, in *Les savoirs scolaires - Enjeux sociaux des contenus d'enseignement et de leurs réformes* (chap. 2), Paris: Éditions universitaires. (Edition originale, 1966, *Revue française de sociologie*).

IZORCHE, M.L. (1977), *Les réels en classe de seconde,* Mémoire de DEA, Université de Bordeaux I, Bordeaux.

KUZNIAK, A. (1994), *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré,* Thèse de didactique des mathématiques, Université de Paris VII.

LEGRAND, L. (1977), *Pour une politique démocratique de l'éducation,* Paris: PUF.

LESELBAUM, N. (1987) (Ed), *Le "prof" mène l'enquête - Guide de l'enquête psycho-sociologique à l'usage des personnels de l'éducation nationale*, Paris: INRP, Rencontres pédagogiques n° 16.

LEVAIN, J.P. (1994), Proportionnalité et acquisition des concepts d'agrandissement et d'échelle, Thèse de Psychologie, Université René Descartes Paris V, Paris.

MARGOLINAS, C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques,* Grenoble: La pensée sauvage.

MEIRIEU, P. (1995), *La pédagogie entre le dire et le faire,* Paris: ESF.

Ministère de l'Education Nationale (1993), *Mathématiques, classes des collèges, 6^e, 5^e, 4^e, 3^e,* Paris: CNDP.

MUNYAZIKWYE, A. (1995), Problèmes didactiques liés aux écritures de nombres, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol 15, 2,* 31-62.

NEYRET, R. (1995), *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants,* Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier Grenoble 1, Grenoble.

PASTRÉ, P. (1992), Requalification des ouvriers spécialisés et didactique professionnelle, *Éducation Permanente n°111, Approches didactiques en formation d'adultes,* 33-54.

PERRIN-GLORIAN, M.J. (1992), *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-sixième*, Thèse de doctorat d'Etat, Université Paris VII, Paris.

PORTUGAIS, J. (1995), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*, Berne: Peter Lang.

PROST, A. (1981), *Histoire générale de l'enseignement et de l'éducation en France, L'école et la famille dans une société en mutation,* tome IV, Paris: France-Labat.

ROBERT, A. (1996), *Une approche de la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de lycée et collège en mathématiques : un essai de didactique professionnelle,* Cahier de DIDIREM n° 26, Paris: IREM de Paris VII.

ROBERT, A. (avril 1996), *La formation professionnelle initiale des enseignants de mathématiques : quel problème de didactique ?* (à paraître).

ROGASLKI, J., & SAMURÇAY, R. (1992), Formation aux activités de gestion d'environnements dynamiques : concepts et méthodes, *Éducation Permanente n°111, Approches didactiques en formation d'adultes,* 227-242.

ROGASLKI, J., & SAMURÇAY, R. (1995), Modélisation d'un "savoir de référence" et transposition didactique dans la formation de professionnels de haut niveau, in G. ARSAC, Y. CHEVALLARD, J.L. MARTINAND & A. TIBERGHEIN, *La transposition didactique à l'épreuve* (pp. 35-71), Grenoble: La pensée sauvage.

ROUCHE, N. (1992), *Le sens de la mesure,* Bruxelles: Didier/Hatier.

ROUCHE, N. (1994), Des grandeurs aux nombres rationnels, *Actes du colloque inter-IREM de géométrie 1992* (pp. 17-27), IREM de Limoges.

TAVIGNOT, P. (1991) *L'analyse du processus de transposition didactique - Exemple de la symétrie orthogonale au collège,* Thèse de sciences de l'éducation, Université René Descartes Paris V , Paris.

TANNER, M. (1992-93), Le décimal n'existe pas - Théorie et applications, *Revue Grand N n° 52,* 43- 47.

TOCHON, F.V. (1992), A quoi pensent les chercheurs quand ils pensent aux enseignants ?, *Revue française de pédagogie n° 99,* 89-113.

VASSORT, L. & M. (1963), *Le nouveau calcul vivant, Classes de fin d'études, Certificat d'études primaires, 3520 exercices et problèmes,* Paris: Classiques Hachette.

VERGNAUD, G. (1987) , Les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant, in J. PIAGET, P. MOUNOUD & J.P. BRONCKART, *Psychologie* (pp. 821-843), Paris: Gallimard, Encyclopédie de la Pléiade, série méthodique.

VERGNAUD, G. (1991), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 10, 2.3,* 133-170.

VERGNAUD, G. (1992), Qu'est-ce que la didactique ? En quoi peut-elle intéresser la formation des adultes peu qualifiés ?, *Éducation permanente n° 111, Approches didactiques en formation d'adultes,* 19-32.

VERGNAUD G. (Ed.) (1994a), *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?,* Paris: Hachette-Education.

VERGNAUD, G. (1994b), Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel, in M. ARTIGUE, M., R. GRAS, R., C. LABORDE, C. & P. TAVIGNOT., *Vingt ans de didactique en France, Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud,* (pp. 177-191), Grenoble: La pensée sauvage.

ANNEXE AU CHAPITRE II

EXTRAITS DES TEXTES OFFICIELS

Nous reproduisons ici des extraits des textes de programmes et des commentaires ou instructions qui les ont accompagnés.

1- ENSEIGNEMENT PRIMAIRE

Cours moyen, de 9 à 11 ans, rubrique 7° "Calcul arithmétique" (1887)
Révision du cours précédent.
La division des nombres entiers.
Idée générale de fractions.
Les fractions décimales.
Application des quatre règles aux nombres décimaux.
Règle de trois, règle d'intérêt simple.
Système légal des poids et mesures.
Problèmes usuels et exercices d'application. - Solutions raisonnées.
Suite et développement des exercices de calcul mental appliqués à toutes ces opérations.

Cours moyen, de 9 à 11 ans, rubrique 7° "Calcul arithmétique" (1923)
Application des quatre règles à des nombres plus élevés qu'au cours élémentaire.(...)
Système des mesures légales à base 10, 100, 1 000.
Multiples et sous-multiples. (...)
Nombres décimaux et fractions décimales. Idée générale de fractions ordinaires. Pratique des quatre opérations sur les fractions ordinaires dans des cas numériquement très simples.
Problèmes sur des données usuelles. Règle de trois simple. Règle d'intérêt simple.
Suite et développement des exercices de calcul rapide et de calcul mental.

Extrait des instructions officielles - Calcul, arithmétique et géométrie (1923)
Il faut signaler (pour le cours élémentaire) une intention qui se manifeste dès la première ligne : "Numération décimale : le mètre, le gramme...". Quand on donnera en classe le principe de la numération décimale, après l'exemple des nombres ordinaires (dix unités valent une dizaine), on ajoutera aussi, sans retard, les exemples tout à fait pareils : dix mètres valent un décamètre, dix grammes valent un décagramme. Ainsi le système légal des mesures, système décimal, appuiera la leçon sur la numération.
L'étude des sous-multiples du mètre, du gramme, se fera plus tard, quand on aura à parler des nombres décimaux. Et ici, plus encore que dans le cas précédent, le système décimal servira de base presque unique aux études de nombres. Les élèves comprendront ce qu'est un dixième de mètre, un dixième de gramme, avant de comprendre ce qu'est un dixième d'unité.
Ainsi le système légal des mesures ne se distingue pas de la numération décimale, au moins à l'origine. (...)

Un autre changement, de même nature, simple interversion de deux chapitres, se présente au sujet des fractions.
Pratiquement, l'étude des sous-multiples dans les mesures légales à base dix conduit aux nombres décimaux. Rien, logiquement, ne distingue les nombres décimaux des nombres entiers ; aussi leur étude, suite immédiate de ce qu'on sait déjà, les calculs où ils interviennent, analogues à ceux qu'on a souvent exécutés, n'embarrassent guère les élèves.
Or ces nombres décimaux peuvent s'écrire comme fractions décimales, presque immédiatement. Et c'est ce que demande le programme actuel, en vue de sérier les difficultés. On écrira ces nombres comme fractions :
0,1 .... 1/10
0,01 .... 1/100
On aura des fractions à dénominateur 10, 100, 1000. On fera sur ces fractions particulières tous les exercices de réduction au même dénominateur, d'addition, de soustraction, etc. Dans la suite pour les fractions ordinaires, selon toute vraisemblance, les élèves seront moins surpris, mieux préparés. La voie inclinée sera plus aisée que la voie abrupte. (...)

Cours moyen (1945)
Nombres décimaux, en liaison avec les unités théoriques et pratiques de monnaies, de longueurs, de distances, de poids et de capacités. Changements d'unités (décimales) ; multiplication et division par 10, 100, 1000.
Usage et pratique des quatre opérations sur les nombres décimaux.
Problèmes de la vie courante, traités oralement ou par écrit, avec éventuellement, usage du calcul mental ou rapide. (...)
Prix et poids à l'unité et exemples analogues de quotients. Règle de trois.
Utilisation des caractères de divisibilité pour la simplification d'un quotient et d'une règle de trois.
Pourcentages ; expressions diverses (6%, 6/100, 0,06). Application à l'intérêt simple.
Fractions très simples de grandeurs : demi, tiers, quart, cinquième, dixième, soixantième. Calculer une fraction d'une grandeur et problème inverse. Additionner, comparer et soustraire des fractions dans des problèmes très simples. (...)
Notions sur les échelles des plans et des cartes. (...)

Extrait des instructions pour le cours moyen (1945)
Nombres décimaux. - L'usage des nombres décimaux (...) est maintenant entré dans la pratique de la vie courante. (...)
Il importe (...) de faire comprendre et apprendre la règle du déplacement de la virgule, soit par changement d'unité, soit par multiplication ou division par 10, 100, 1 000. Pour cela il est au moins commode d'utiliser toutes les unités décimales du système métrique. Cependant dans les données et les résultats des problèmes, il vaut mieux se borner aux seules unités pratiques (indiquées dans les commentaires du cours élémentaire). Il est bon que les chiffres décimaux, complétés au besoin par des zéros, correspondent à des unités pratiques. On est ainsi amené à indiquer un nombre en francs avec deux décimales (c) ; un nombre en mètres avec deux ou trois décimales (cm ou mm) ; un nombre en kilomètres avec trois décimales (m) ; un nombre en litres avec deux décimales (cl) ; un nombre en mètres cubes avec trois décimales (dm^3), etc.

Opérations.- Les règles de changement d'unité permettent d'expliquer - sinon de justifier- la pratique des opérations. L'addition ou la soustraction de nombres décimaux se ramène immédiatement à celle des nombres entiers par un changement convenable d'unité. Pour additionner
3,15 m avec 2,10 m,
il suffit d'additionner
315 cm et 210 cm,
puis de revenir à l'expression du total en mètres.

On peut justifier la règle de la virgule dans la multiplication par un double changement d'unité. Par exemple :

3,40 x	7,25	peut être remplacé par
(f par litre)	(litres)	

0,034 x	725 = 24,65 f
(f par cl)	(cl)

De même pour la division

2,975 :	0,790	peut être remplacé par
(kg)	(kg par l)	

2975 :	790 = 3,76 litres ; reste 4,6 g
(g)	(g par l)

Dans ce cas le remplacement n'est plus une explication mais une partie de la règle pratique.
Ces exemples montrent en même temps combien peut être suggestif l'emploi de formules où chaque nombre est accompagné de l'indication de l'unité, ainsi qu'il a été dit pour le cours élémentaire. Cette façon d'écrire la division donne aussi une indication précise sur la nature concrète du reste.

Problèmes. - (...) Les mots de vie courante, employés dans le programme, marquent la volonté d'une relation étroite entre les mathématiques de l'école et les nécessités de la vie. Des problèmes de la vie courante sont des problèmes vraisemblables, dont l'élève a vu ou verra des exemples autour de lui. Avant de faire traiter un exercice dans la classe ou de le donner en devoir écrit, le maître se demandera si cet exercice peut se présenter raisonnablement dans la pratique. Pour connaître le diamètre d'une tête de clou, il est plus immédiat, plus commode et plus exact de mesurer directement ce diamètre avec un pied à coulisse. Par contre, il vaut mieux chercher d'abord la circonférence d'un gros arbre, puis calculer son diamètre. Dans le partage d'une succession, le premier nombre connu, sauf circonstances exceptionnelles, est le montant de l'héritage ; on passe de ce montant aux parts et non de ces parts au montant. Par contre, un poids de confiture peut se calculer à l'avance, d'après le poids de jus de fruit, le poids de sucre, et la réduction approximative du poids à la cuisson.

Quotients et règles de trois.- Le programme comporte explicitement l'étude du prix et du poids à l'unité et des analogues de quotients qui peuvent être compris dans la dénomination générale de "valeur de l'unité". Une telle valeur peut être un prix par unité de longueur, de distance, de surface, de volume ou de capacité, de temps ; ce peut être un poids par unité de longueur ou de volume (poids spécifique) ; ce peut être encore une distance ou un volume par unité de temps (vitesse ou débit) ; ce peut être un rendement en volume, poids ou argent par unité de surface.

Leur calcul et leur emploi sont résumés dans la formule :
Valeur totale = valeur de l'unité x nombre d'unités.

Cette formule donne la règle de calcul, soit du premier nombre par une multiplication, soit de l'un des termes du deuxième membre par une division.
L'énoncé d'une "valeur de l'unité" exige l'emploi de deux unités de nature différente : f par m, f par km, f par m^2, f par l, f par kg, g par cm, kg par l, km par h, cl par s, hl par a, etc.
Il y a lieu de faire à leur sujet des exercices de changement d'unité, par exemple :
1 kg/l = 1.000 g/l = 0,001 kg/cm^3 = 1 g/cm^3.(...)

Pourcentages.- Les pourcentages sont considérés comme des multiplicateurs abstraits, c'est-à-dire indépendants du choix de l'unité de la grandeur considérée. Prendre 80 p. 100 d'une grandeur, c'est partager cette grandeur en 100 parties égales et prendre 80 de ces parties. Il suffit pour cela de multiplier la mesure de la grandeur par 0,80. On met ainsi en évidence la recherche inverse qui se fait en divisant par 0,80 :

Poids de farine = poids de blé x 0,80 ;
Poids de blé = poids de farine : 0,80.

Les pourcentages se rencontrent dans des problèmes de proportions concernant des mélanges, des transformations, etc. Par exemple : azote dans l'air, savon frais et savon sec, poids de farine et poids de pain, acompte à verser, part de l'État et de la commune dans l'impôt, intérêt annuel d'un capital.

Cours moyen (1970)
1- Éléments de mathématique
Nombres naturels et décimaux : nom et écriture.
Multiplication et division par 10, 100, 1000...
Opérations et leurs propriétés ; suite d'opérations ; pratique des opérations ; preuve par 9 des opérations ; calcul mental.
Divisibilité des nombres naturels par 2, 5, 9 et 3.
Exemple de relations numériques. Proportionnalité.
Fractions. Produit de deux fractions.

2- Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques (...)

3- Mesures : exercices pratiques (...)

Commentaires du programme (1970)
(...) [Les commentaires] ne sauraient être considérés comme un cours de mathématiques. Ils s'adressent aux maîtres et se proposent seulement des les éclairer sur l'esprit dans lequel il est actuellement souhaitable d'enseigner les mathématiques à l'école primaire. Ils ne traitent pas également toutes les questions. Ils ont été particulièrement détaillés à propos de celles dont la présentation est à renouveler.[1] (...)
En dépit de son désir d'être une approche, la plus correcte et la plus précise possible, de quelques concepts fondamentaux, abstraits par nature, l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire demeure résolument concret. (...)

3. Comparer deux nombres
3.1 *Emploi du signe* "="
D'une façon générale, lorsque l'on écrit
a = b
c'est que les symboles a et b *désignent le même objet.*
En particulier un nombre peut s'exprimer de différentes façons :
Exemples : 6 ; 2 x 3 ; 4 + 2 ; 8 - 2 ; 24 : 4 sont des désignations du même nombre.
Cela donne le droit d'écrire
6 = 6
6 = 2 x 3
2 x 3 = 4 + 2 etc.[2] (...)

4. Opérations. Propriétés. Pratique
L'étude des nombres naturels comprend celle de deux opérations fondamentales, l'addition et la multiplication, qui donnent à l'ensemble de ces nombre sa structure algébrique propre.
A ces deux opérations se rattachent la soustraction, la division exacte et la division euclidienne (c'est-à-dire avec reste pouvant être différent de zéro).(..)
Rappelons que l'addition (comme la soustraction, la multiplication...) porte sur les nombres et non sur les ensembles que ces nombres qualifient : on réunit des ensembles d'objets ; on additionne des nombres.

---

[1] Quatorze pages sont consacrées aux opérateurs, trois pages aux décimaux.

[2] Ceci prend le contre-pied des instructions de 1945 pour le cours élémentaire : *Le signe = ne sépare pas deux nombres égaux, ce qui ne servirait à rien ; on n'écrit pas 3 = 3. Il sépare l'indication d'une opération et son résultat ou encore l'indication de deux opérations qui ont le même résultat.*

Les phrases telles que :
8 pommes + 7 pommes = 15 pommes
n'appartiennent en fait, ni au langage mathématique, ni au langage usuel.(...)

On peut écrire indifféremment (8 x 5) ou (5 x 8) puisque ces deux écritures désignent le même nombre. On l'appelle *produit* des deux nombres donnés.
La *multiplication* est l'opération qui associe à deux nombres leur produit. Aux couples (8 ; 5) et (5 x 8) la multiplication fait correspondre le nombre 40.
(8 x 5) = (5 x 8) = 40
La multiplication est *commutative*. Les deux nombres 8 et 5 jouent le même rôle.(..)

7. Nombres décimaux
7.1. Définition et écriture
Les nombres décimaux sont introduits au cours moyen : à ce niveau les enfants savent écrire et nommer les nombres naturels à partir de groupement d'objets d'un ensemble.
On peut chercher à mettre en évidence le nombre des groupements d'une certaine espèce : (...)
Une ville compte 10 850 habitants. Le millier étant choisi comme unité, la population s'exprime par le nombre décimal 10,850.
La virgule est utilisée pour repérer le rang du groupement choisi comme unité.(...)
On remarquera qu'à tout nombre naturel exprimant une mesure on peut associer, par un changement d'unité convenable, un nombre décimal et qu'à tout nombre décimal on peut associer, par un changement d'unité, un nombre naturel (et cela de diverses façons).

7.2.1. Addition et soustraction
(...) Trois villes voisines A, B, C, se sont réunies pour ne plus former qu'une seule agglomération. Leurs populations étaient, en milliers d'habitants

A	28,5
B	11,4
C	4,7

Quelle est, en milliers d'habitants, la population de la nouvelle ville ainsi formée ?

Cet exemple montre que l'on peut définir l'addition des nombres décimaux en l'associant à l'addition des nombres naturels.

[La multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier] se présente comme une addition de nombres décimaux égaux.
Exemple : 0,2 x 3 = 0,2 + 0,2 + 0,2 = 0,6

Multiplication et division par 10, 100, 1 000
D'après les propriétés de la numération et de la multiplication :

2 x 10 = 2	2 : 10 = 0,2
43,21 x 10 = 432,1	432,1 : 10 = 43,21
0,062 x 100 = 6,2	6,2 : 100 = 0,062 (...)

Un changement d'unité ramène [la multiplication de deux nombres décimaux] à la multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. (...)
Les notions de division exacte et de quotient exact définies pour les nombres naturels a et b s'étendent aux nombres décimaux :
a et b étant entiers ou décimaux,le quotient exact de a par b, s'il existe, est le nombre entier ou décimal dont le produit par b est égal à a. Si on représente ce quotient exact par r , on a :
r x b = a ou b x r = a ou a : b = r

Si b est un nombre naturel, la recherche du quotient exact se justifie en utilisant la propriété suivante que l'on vérifiera sur des exemples numériques : Si l'on multiplie l'un des facteurs par 10, 100, 100, ... le produit est multiplié par 10, 100, 1000,...
Le cas où b est un nombre décimal se ramène au cas précédent.

On se limitera dans les exercices à des nombres simples. Il conviendra de remarquer que le quotient exact tel qu'il a été défini n'existe pas toujours.(..)
Le sens des expressions quotient à 1 ; 0,1 ; 0,01 près pourra être précisé à l'occasion d'exercices.

8. Résolution de problèmes
La classe avec sa vie propre, l'enseignement que l'on y donne en toutes matières, le monde extérieur fourniront de nombreuses occasions d'exercer, à chaque niveau et selon les possibilités des enfants, cette activité privilégiée qu'est la résolution des problèmes, qu'ils soient numériques ou non numériques.
Les thèmes seront les plus divers. Ils permettront en particulier une certaine initiation des élèves à la vie courante de leur époque, que l'enseignement élémentaire se doit de leur donner. Toutefois, les situations retenues dans ce domaine correspondront aux préoccupations et aux intérêts réels des enfants. (...)

Il y a problème si, connaissant un certain nombre d'informations concernant une situation, on se propose de déduire de ces informations des renseignements non explicités initialement.
Résoudre un problème, c'est analyser la situation et les informations données, dégager éventuellement des chaînes de situations élémentaires, les schématiser afin de mettre en évidence les relations mathématiques qui les décrivent, utiliser ces relations et leurs propriétés pour en déduire les renseignements cherchés.
Les élèves doivent apprendre à passer d'une situation à un schéma mathématique qui la décrit ; inversement, un bon exercice consiste à imaginer des situations décrites par un schéma donné.

Objectifs (1980)
(...) 3. Écrire, nommer et comparer les nombres décimaux
3.1.- Prendre conscience, dans des situations appropriées, de la nécessité d'étendre le domaine du calcul par l'introduction de nouveaux nombres : nombres décimaux et nombres qui s'écrivent sous la forme de fractions simples.

3.2. Savoir : (...)
- désigner un nombre décimal par des écritures additives, multiplicatives, soustractives et fractionnaires et passer d'une écriture à une autre,
- reconnaître sous des écritures différentes le même nombre décimal.

3.3. - Savoir comparer les nombres décimaux :
- les situer les uns par rapport aux autres (en particulier sur une ligne en respectant l'ordre),
- intercaler un décimal entre deux décimaux,
- encadrer un décimal par deux décimaux, et en particulier, par deux naturels consécutifs.

N.B. : L'étude des nombres décimaux et de leur structure n'est pas achevée à la fin du cycle moyen. Elle devra se prolonger tout au long de la scolarité au collège.

4. - Calculer sur les nombres.
4.1.- Savoir :
- reconnaître analyser et résoudre des situations relevant des diverses opérations sur les nombres ; donner un sens aux opérations sur les nombres décimaux ; (...)
- élaborer et mettre en œuvre une technique de calcul des quotients décimaux approchés de deux naturels.
N.B. Les techniques de calcul des quotients de nombres décimaux ne constituent pas un objectif du cycle moyen.
(...)

4.3.- Élaborer des procédures de calcul approché sur les naturels et les décimaux et savoir :
- évaluer l'ordre de grandeur et trouver des encadrements du résultat d'un calcul,
- s'assurer de la vraisemblance d'un résultat.

5- Représenter et utiliser des fonctions numériques
5.1. Dans des situations variées, savoir élaborer et/ou interpréter des descriptions (orales, écrites ou graphiques, -conventionnelles ou non) de relations numériques.
5.2.- Savoir :
- reconnaître, utiliser et représenter les fonctions qui, à un nombre n (naturel ou décimal), associent n + a ou n x a (a étant un naturel ou un décimal) et leurs réciproques ;
- utiliser leurs propriétés (sans formalisation).
5.3.- Savoir reconnaître, organiser et traiter des situations relevant des fonctions numériques, celles citées ci-dessus (en particulier celles qui relèvent de la proportionnalité) et d'autres.

Instructions pédagogiques (1980)
3. Écrire, nommer, comparer les nombres décimaux

3.1.- De nouveaux nombres

3.1.1.- A l'issue du cycle élémentaire, les seuls nombres connus sont les nombres naturels. Diverses situations permettront aux enfants de prendre conscience de la nécessité de disposer d'autres nombres. Ainsi :
3.1.1.1.- Certaines relations numériques précédemment étudiées ne sont pas partout définies. Ainsi, la fonction "retrancher 15" dans N n'est pas définie pour 0, 1, 2....14 ; la fonction "diviser par 100" dans N n'est pas définie pour 22, pour 1 110, etc.
Pour étendre la définition de ces fonctions, on sera amené à introduire, au collège, de nouveaux nombres (selon le cas : entiers négatifs ou nombres rationnels).
L'ensemble des nombres décimaux, étudié au cycle moyen, est tel que les fonctions "diviser par 10", "diviser par 100", diviser par 1 000" etc., y sont partout définies.
(...)
3.1.1.3.- Il est utile de représenter l'ensemble des nombres naturels à l'aide de points d'une droite graduée. Mais de nombreux points ne correspondent à aucun nombre naturel. On peut chercher à affecter un nombre à d'autres points de la droite ; par exemple : *au milieu du segment défini par le "point 102" et le "point 103".*
3.1.1.4.- Certaines situations de partage amènent à prendre conscience de l'insuffisance des nombres naturels (exemple : partager 8 en 5 ou 1 en 3), ce qui conduit à introduire des fractions. L'étude des nombres décimaux apparaît alors comme des nombres qui :
- peuvent s'écrire sous la forme de fractions décimales (...)
- permettront, ultérieurement, d'approcher par encadrement d'autres fractions (...)

3.1.2.- Les maîtres choisiront celle (ou celles) de ces situations qui leur paraissent aider le mieux à prendre conscience de la nécessité d'introduire de nouveaux nombres. Ces situations ne sont pas équivalentes, car elles privilégient plus ou moins tel ou tel aspect de l'étude des nombres décimaux : il conviendra de s'assurer qu'aucun des objectifs n'a finalement été négligé.
Certes l'ensemble des décimaux ne permet pas de décrire ou traduire toutes les situations auxquelles les enfants sont susceptibles d'être confrontés. Il permet cependant d'approcher d'aussi près qu'on le veut les nombres (non décimaux) qui interviennent alors.(...)

3.1.4.- L'objectif assigné au cycle moyen concerne essentiellement les nombres décimaux. Cependant, à l'issue de l'école élémentaire, les enfants doivent connaître un certain nombre de fractions simples : (...)
- une phrase telle que "*j'ai pris les trois quarts des quantités indiquées*" acquerra sa signification grâce à l'utilisation des fonctions numériques et de leurs composées (...)
- les indications 3/4, 1/3, 1/8, 1/10 portées sur un verre mesureur ont le même statut que l'indication 1 (écritures de nombres qui permettent d'exprimer la mesure d'une quantité de liquide, le litre étant pris pour unité).

Les enfants doivent connaître la signification de ces fractions simples et savoir les situer par rapport aux nombres décimaux. Les désignations usuelles de "l'heure" fourniront à ce sujet un champ d'investigation important. (...)

3.3- Comparer les nombres décimaux
L'un des aspects le plus neuf et le plus important de cet ensemble de nombres est la façon dont il est ordonné.
Entre deux nombres décimaux, il y en a toujours une infinité d'autres. Les réflexes acquis à propos des nombres naturels ne conviennent plus (...). Un travail approfondi doit donc être fait sur l'ordre de grandeurs des nombres décimaux. Ainsi :
7,013 est entre 7,01 et 7,02 ;
entre 7 et 7,1, mais beaucoup plus près de 7 ;
un tout petit peu plus grand que 7.
7,3 est entre 7 et 7 et demi, plus près de 7,5 que de 7.
Ces commentaires peuvent s'accompagner d'une représentation par les points d'une droite graduée où des graduations de plus en plus fines permettent de localiser des nombres très divers. Pour intercaler des nombres entre *7,05* et *7,06* par exemple, les enfants doivent passer sur une graduation plus fine, ce qui se traduit par un allongement des écritures.

3.4. Utiliser les nombres décimaux
(...) Dès le cycle élémentaire, avant l'études des décimaux, les enfants ont fréquenté des écritures à virgule, notamment dans des situations problèmes *(3,50 F*; *12,50 m*). Ils les interprètent initialement comme des écritures complexes (*3 francs et 50 centimes* ; *12 mètres et 50 centimètres*). il convient d'assurer la liaison entre ces écritures et les nombres décimaux.
Connaître les nombres décimaux n'interdit pas, dans certaines situations, d'utiliser des désignations complexes qui renvoient à un sens pratique : "*deux kilogrammes quatre cent cinquante*" plutôt que "*deux kilogrammes quarante-cinq*". Cependant, s'il s'agit d'effectuer un calcul, on travaillera avec l'écriture *2,45* (de même que pour facturer un temps de réparation, un garagiste remplace *2 h 45 mn* par *2,75*).(...)

4.1.1.- Addition, multiplication, soustraction des nombres naturels ou décimaux
(...) L'étude de la multiplication de deux nombres décimaux débutera par la recherche de situations où, a et b étant décimaux, l'expression $a \times b$ ait une signification (la vie courante, les achats de matériaux divers en fournissent à volonté). Ce travail précédera dans tous les cas l'étude du prolongement de la technique de la multiplication qui en est directement dépendante et ne doit surtout pas de limiter à la mise en place d'un mécanisme aveugle.(...)

4.1.2.2.- Prolongement à D de la division
Ce prolongement suppose différentes étapes.
L'une d'elles consiste à obtenir un quotient décimal dans la division de deux entiers naturels. Nombreuses sont les situations qui requièrent un résultat de cette nature et à partir desquelles engager la recherche de procédures appropriées. Il doit s'agir essentiellement de prolongements - qui doivent être justifiés- de techniques antérieurement maîtrisées.
La division de deux nombres décimaux ne fera pas l'objet d'un travail systématique au cycle moyen. Cependant dans des situations où elle est rendue nécessaire, il sera demandé aux élèves de tenter de construire et de justifier des procédures conduisant à l'obtention d'un résultat. Une activité préalable, consiste (...) en la recherche de couples dividende-diviseur conduisant au même quotient. Par exemple, *les quotients de 12 par 5, de 24 par 10, de 36 par 15, de 3,6 par 1,5 sont égaux.* (...)

5.1.- De nombreuses situations rencontrées en classe ou hors de la classe, et en particulier au cours des activités d'éveil, conduisent à constater et à expliciter une correspondance entre deux ensembles de données numériques (par exemple : a*chat d'articles à l'unité, à la longueur, au poids, etc. ; masse et volume ; compteur de pompe à essence ; tarif d'une course en taxi ; affranchissement postal, etc.*).

Cours moyen (1985)
(...) Écriture, nom et comparaison des entiers naturels. Nécessité d'introduire de nouveaux nombres : nombres décimaux et nombres s'écrivant sous forme de fractions simples.

Écriture et nom des nombres décimaux.
Désignation d'un nombre décimal par l'addition, la soustraction et la fraction : passage d'une écriture à une autre.
Comparaison des nombres décimaux (intercalation, encadrement).

Problèmes relevant de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division ; élaboration, dans l'ensemble des décimaux, des techniques opératoires, mentales ou écrites, et des procédés de calcul approché (ordre de grandeur et encadrements).

Reconnaissance et utilisation des fonctions numériques : n ---> n + a, et n ---> n x a, et leurs réciproques, définies dans l'ensemble des nombres décimaux. Problèmes relevant de ces fonctions et plus particulièrement de la proportionnalité (exemple de la règle de trois).

Application des procédures de calcul mental dans l'ensemble des décimaux, en utilisant des techniques opératoires, et les propriétés des fonctions numériques étudiées.

Instructions (1985)
(...) Lors de l'introduction de notions nouvelles, les élèves sont mis en situation d'apprentissage actif : ils découvrent les notions comme des réponses à des problèmes.

Objectifs de fin de cycle 3 (1991)
Connaissance des nombres
L'élève saura nommer, écrire des nombres entiers ou décimaux, passer d'une écriture à une autre, en particulier : (...)

. employer quelques écritures fractionnaires usuelles (demi, tiers, quart, fractions décimales),
. connaître la signification de chacun des chiffres composant un nombre à virgule,
. passer, pour un nombre décimal, d'une écriture à virgule à une écriture fractionnaire décimale (et réciproquement).

L'enfant saura comparer des nombres, notamment : (...)
. comparer, ranger des nombres à virgule,
. réaliser des encadrements (d'entiers ou de décimaux) et évaluer un ordre de grandeur,
. intercaler des entiers ou des décimaux entre deux nombres donnés.

Calcul
L'élève sera apte à calculer sur les nombres ; pour cela il devra :
. (...) savoir multiplier un décimal par 10/ 100/ 1000, multiplier le cas échéant un nombre entier ou décimal par 0,1/ 0,01, ...
. Maîtriser les techniques opératoires usuelles : addition, soustraction, multiplication des entiers ou des décimaux, (...) division d'un décimal par un entier (le calcul du quotient de deux décimaux n'est pas un objectif de ce cycle)
. évaluer un ordre de grandeur,
. utiliser la calculette.

Il saura reconnaître les problèmes qui relèvent des opérations évoquées précédemment.

Il sera capable d'utiliser quelques fonctions numériques, c'est-à-dire : (...)
. reconnaître une situation de proportionnalité et la traiter par les moyens de son choix (utilisation de graphiques, de tableaux de nombres, de propriété de linéarité, éventuellement de la règle de trois...).

Les notions de moyenne, de vitesse moyenne, d'échelle, de pourcentage font l'objet d'une première approche ; aucune technicité n'est exigée dans leur maniement.

De façon plus générale, les compétences dans le domaine de la proportionnalité sont en cours d'acquisition et feront l'objet d'une étude plus approfondie au collège.

Programmes de cycle des approfondissements (1995)
Au cycle des approfondissements, l'élève consolide et prolonge ses acquis concernant les nombres entiers et découvre de nouveaux nombres : les nombres décimaux et les fractions. Il achève de construire les techniques opératoires de la multiplication et de la soustraction et découvre celle de la division. Il approche la notion de fonction numérique, en particulier dans le cadre de situations de proportionnalité. (...)

La résolution de problèmes occupe une place centrale dans l'appropriation par les élèves des connaissances mathématiques. La plupart des notions, dans les domaines numérique, géométrique, ou encore dans celui de la mesure, peuvent être élaborées par les élèves comme outils pertinents pour résoudre des problèmes nouveaux, avant d'être étudiées pour elles-mêmes et réinvesties dans d'autres situations.

Nombres et calcul
* Nombres naturels :
- numération décimale (interprétation de l'écriture chiffrée d'un nombre),
- ordre sur les naturels (utilisation des signes < et >),
- relations arithmétiques entre les nombres (double, moitié, tiers... pour des nombres simples ; multiples de 2, 5 et 10),
- techniques opératoires de la soustraction de la multiplication, de la division euclidienne,
- pratique du calcul exact ou approché en utilisant :
  . les techniques opératoires,
  . le calcul réfléchi (mentalement ou avec l'aide de l'écrit)
  . la calculatrice dans les situations où son usage s'avère pertinent,
  . l'ordre de grandeur (encadrement, valeur approchée),
- problèmes relevant de l'addition, la soustraction, la multiplication, la division euclidienne.

* Fractions simples : écriture, comparaison de fractions de même dénominateur.

* Nombres décimaux :
- écriture à virgule, écriture fractionnaire, passage d'une écriture à l'autre,
- ordre sur les décimaux (comparaison, encadrement),
- pratique du calcul exact ou approché en utilisant :
  . les techniques opératoires (addition, soustraction ; multiplication et division d'un décimal par un entier)
  . le calcul réfléchi (mentalement ou avec l'aide de l'écrit),
  . la calculatrice dans les situations où son usage s'avère pertinent,
  . l'ordre de grandeur (encadrement, valeur approchée),
- problèmes relevant de l'addition et de la soustraction, de la multiplication et de la division d'un décimal par un entier, de la division euclidienne de deux entiers.

* première approche de la proportionnalité :
- reconnaissance de situations de proportionnalité dans des cas simples (échelles, pourcentages),
- utilisation de tableaux, diagrammes, graphiques.

SECONDAIRE
Classe de sixième (1923) (2 heures) [3]
(...) Fractions de grandeurs, notion de fraction, fractions égales, réduction de plusieurs fractions au même dénominateur.

Problèmes sur les fractions de grandeurs, opérations sur les fractions, fractions décimales, nombres décimaux.

---
[3] Arrêté du 3 décembre 1923.

Classe de cinquième (2 heures)
Système métrique - Longueurs, aires, volumes, poids, densités, monnaies. Temps, vitesse. Exercices simples de changements d'unités. Règles de trois par la méthode de réduction à l'unité. Intérêt simple.- Exemples relatifs à l'escompte et aux rentes. (...)

Classe de quatrième (2 heures) [4]
Partie aliquote commune à deux grandeurs. Définition du PGCD et du PPCM de deux nombres.
(...) Exercices sur le système métrique, les fractions ordinaires ou décimales, les grandeurs directement ou inversement proportionnelles.
Définition de la racine carrée. Règle pratique pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou décimal, à moins d'une unité décimale d'un ordre donné.

Classe de troisième (3 heures)
Arithmétique et algèbre
Propriétés des sommes, différences, produits et puissances des nombres entiers ou fractionnaires.
Rapport de deux grandeurs. Grandeurs proportionnelles. (..)

Géométrie
Points qui partagent un segment de droite dans un rapport donné.
Droites parallèles et lignes proportionnelles.
Triangles semblables (...)
Construction de la quatrième proportionnelle et de la moyenne proportionnelle. (...)
Rapport des aires de deux triangles semblables.

Instructions (1923)
La multiplicité des types d'enseignement que l'organisation de 1902 avait introduite dans nos lycées devait avoir et avait eu pour conséquence une régression de la culture générale devant le développement envahissant des disciplines spéciales. (...) Partout, en somme, culture spéciale, donc culture incomplète ; développement précoce et rapide de certaines qualités utiles à telles professions déterminées, non par formation progressive et harmonieuse d'une intelligence complète où les qualités opposées se tempèrent et s'équilibrent.

(...) Le véritable objet de l'enseignement secondaire réapparaît en pleine clarté. Il ne lui appartient pas de préparer les élèves qui s'adressent à lui à une profession déterminée ni même de les aiguiller vers l'une ou l'autres des grandes voies intellectuelles où se déploient les activités des hommes. Il fait plus et mieux : sa tâche est, sans les préparer à rien, de les rendre aptes à tout.

Instructions relatives à l'enseignement des mathématiques (1923)
La partie la plus délicate du programme de sixième est relative aux fractions [5]. Il importe que les élèves en acquièrent une idée précise : cela semble possible au départ des fractions de grandeurs mesurables familières aux enfants. Une fraction de grandeur se présentant comme le produit de deux opérations successives, division de la grandeur considérée par un nombre entier, puis multiplication du résultat par un autre nombre entier, la fraction abstraite qui résume ces deux opérations apparaît comme un multiplicateur de la grandeur primitive. L'égalité et plus généralement l'ordre de grandeur de deux fractions abstraites résultent de la comparaison de deux grandeurs obtenues en multipliant une même grandeur par l'une ou l'autre de ces fractions.
(...)
L'addition de plusieurs fractions d'une même grandeur conduisant à une fraction de cette grandeur, les notions d'addition et de somme des fractions abstraites en découlent, ainsi que les propriétés commutatives et associatives de l'opération correspondante.

---

4 Porté à trois heures en 1925.

5 Le texte des programmes de 1902 pour la sixième moderne (B) ne mentionnait pas les grandeurs à propos du calcul sur les fractions.

En multipliant une grandeur par une fraction et le résultat obtenu par une autre fraction, on obtient une nouvelle fraction de la grandeur primitive : on est amené ainsi à la multiplication et au produit de deux ou plusieurs fractions abstraites, aux propriétés de l'opération.
(...)
Les fractions décimales, envisagées comme cas particulier des fractions ordinaires, permettent de reprendre les opérations sur les nombres décimaux. Il n'y a aucune difficulté pour l'addition, la soustraction et la multiplication de ces derniers. La division exacte de deux nombres décimaux acquiert son véritable caractère et le quotient se présente sous forme de fraction ordinaire. Deux problèmes se posent à cette occasion, reconnaître s'il existe un nombre décimal égal à une fraction ordinaire donnée, trouver les nombres décimaux approchés d'une fraction donnée à moins d'une unité décimale d'un ordre donné. L'étude complète du premier est prématurée, et tout au plus, peut-on se borner à des exemples. Le second est déjà traité dans le cas particulier du quotient approché à 1 près ; l'intérêt en apparaît mieux à propos des applications du système métrique.

Commentaires pour la classe de cinquième
(..) L'application de la règle de trois, par la méthode de réduction à l'unité, à des problèmes où ne figurent que des grandeurs mesurables, ne présente pas de difficulté spéciale. L'emploi des fractions de grandeurs résultat d'une proportionnalité de grandeurs associées, permettra souvent d'abréger.

Commentaire pour la classe de quatrième
La notion de plus grande partie aliquote commune à deux grandeurs de même espèce en supposant que ces grandeurs aient une et par suite une infinité de parties aliquotes communes, est-elle accessible à ce niveau ? La réponse est sans doute négative pour la plupart des élèves, bien qu'on donne assez souvent des exercices qui s'appuient sur cette notion. Le procédé qui la mettrait en évidence est celui des divisions successives, devant quoi on recule généralement pour deux nombres entiers abstraits, et qui sert de base au théorème fondamental. Il convient d'ailleurs de laisser toute liberté au maître à ce sujet. (...)

A propos de la recherche de la racine carrée, exacte ou approchée à 1 près, d'un nombre entier, le programme limite encore l'effort à l'acquisition de la règle pratique. Cela n'empêche pas de montrer la loi de formation d'une table contenant les carrés des nombres entiers consécutifs et le parti qu'on n peut tirer, pour trouver la racine exacte ou approchée à 1 près d'un nombre entier ou décimal qui s'y encadre, ainsi que le reste de l'opération ; certaines particularités de la règle pratique se trouveront expliquées du même coup. L'extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou décimal, approchée à moins d'une unité décimale d'un ordre donné, se ramène immédiatement à la précédente, si l'on regarde le nombre donné comme la mesure de l'aire d'un carré dont on demande d'évaluer le côté ; il suffit pour cela d'effectuer un changement d'unité convenable.

Commentaire pour la classe de troisième
(...) C'est à ce niveau que la forme abstraite des propositions relatives aux nombres, indépendamment des grandeurs qu'ils mesurent, doit être précisée et fixée dans la mémoire des élèves. Il faudra insister sur le passage de la proportionnalité des grandeurs aux proportions arithmétiques et vice versa : un retour constant aux propriétés des fractions sera nécessaire. On préparera ainsi le premier contact avec l'algèbre.

Sixième et année préparatoire (1937 et 1938)
Arithmétique appliquée
Exercices de calcul sur les nombres entiers et les nombres décimaux, en liaison avec la mesure des grandeurs : système métrique, quotient, règle de trois.(...)
Mesure des poids : poids spécifique et volume spécifique.
Monnaies : prix unitaire d'une marchandise et quantité de marchandise correspondant à l'unité de monnaie.

Vitesse dans le cas d'un mouvement uniforme ; espace parcouru pendant l'unité de temps et temps nécessaire au parcours d l'unité d'espace.
Pourcentage, intérêts simples, escompte, rentes.

Cinquième-Première année
Arithmétique et algèbre.
I- Révision d'une partie du programme de l'enseignement primaire élémentaire et compléments.
Numération décimale. Nombres entiers. Nombres décimaux.
Division : quotient de deux nombres entiers à une unité près ; quotient de deux nombres entiers ou décimaux à une approximation décimale donnée. (...)
Multiplication et division d'une grandeur par une fraction de deux grandeurs. Fractions égales. Opérations sur les fractions exposées à partir de problèmes concrets.

II- Programme particulier à la classe
Problèmes simples, dont les données sont des nombres décimaux et éventuellement des fractions, qui conduisent à une équation du premier degré à une inconnue. Choix des unités. Changement d'unité. Emploi d'une lettre pour désigner l'inconnue. Mise en équation. Transformation et simplification de l'équation. (...)

Quatrième-Deuxième année
Arithmétique et algèbre
I. Graphiques et équations
(...) Problèmes conduisant à une équation numérique du premier degré ou à un système de deux équations numériques du premier degré. Interprétations et solutions graphiques.
Proportions et partages proportionnels.

III- Arithmétique
Pratique, sur des exemples simples, de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, de la recherche du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple : application aux fractions.

Géométrie
(...) *II- Programme particulier à la classe*
(...) Produit d'un segment par une fraction. Rapport de deux segments.
Diverses formes du théorème de Thalès (La définition et l'utilisation de l'homothétie sont facultatives). Proportionnalité d'un segment projeté et de sa projection : application à la construction du produit d'un segment par une fraction, d'une quatrième proportionnelle, des points d'une droite dont le rapport des distances à deux points de cette droite est donné.

Troisième-Troisième année
Algèbre.
I- Révision d'une partie du programme de la classe précédente et compléments.
Grandeurs proportionnelles et grandeurs à accroissements proportionnels : relations $y = ax$ et $y = ax + b$; graphiques.

II- Programme particulier à la classe
Problèmes empruntés à la géométrie et à la physique conduisant à des relations de la forme $y = x^2$, $y = ax^2$, $y = 1/x$, $y = a/x$, où a est un coefficient numérique [6] ; tableaux de valeurs. Graphiques.
Définition de la racine carrée arithmétique. Recherche d'une valeur décimale approchée : usage d'un graphiques, d'une table de carrés, de la règle d'extraction arithmétique donnée sans justification.

---

[6] Dans le texte, le trait de fraction est horizontal et non oblique.

Géométrie

I- Révision d'une partie du programme de la classe précédente et compléments.

(...) Projections orthogonales. Sinus, cosinus, tangente d'un angle dont la mesure est comprise entre 0 degré et 180 degrés. Usage des tables de valeurs naturelles.

Instructions du 30 septembre 1938

Les enfants qui abordent l'enseignement du second degré sont déjà habitués à l'emploi du système métrique, aux procédés courants de mesure des grandeurs usuelles et au calcul des opérations sur les nombres décimaux qui résultent de ces mesures. Il est nécessaire de leur faire réviser et préciser ces connaissances et de les familiariser complètement avec leur usage, avant d'aborder des exposés logiques de démonstrations, ou des études de problèmes abstraits qui, commencées trop tôt, risqueraient de dépasser leur intelligence, de les détourner des mathématiques, ou de leur donner de cette science l'idée fausse d'un recueil de raisonnements artificiels, et de spéculations ingénieuses, sans portée générale.

C'est dans cet esprit d'application concrète et immédiate qu'a été établi le programme officiel. Le premier alinéa précise que l'étude du calcul doit se faire en liaison avec celle de la mesure des grandeurs ; les alinéas suivants indiquent quelles sont ces grandeurs (...). Les angles et les temps sont les seuls exemples où s'est maintenu l'usage de nombres complexes ; encore convient-il souvent de les transformer en nombres décimaux. Le programme détaillé accentue ce caractère concret, pratique ou utilitaire ; c'est une indication, non pas de théories nouvelles, mais d'exercices d'application.

Ces exercices doivent être vraisemblables, c'est-à-dire susceptibles d'être rencontrés dans la vie courante ; on évitera notamment de faire calculer des nombres qu'une mesure simple permet de connaître.

Les donnés numériques seront des nombres simples et on évitera de dépasser deux ou trois chiffres caractéristiques. Ainsi on restera dans le domaine de la pratique courante et on pourra souvent faire utiliser un calcul mental ou rapide.(...)

Les mesures de grandeurs et les exercices d'application comporteront des vérifications expérimentales de lois simples déjà connues des élèves et plus ou moins justifiées par des raisonnements.
Exemples : la pesée d'une cercle et d'un carré en carton permet d'obtenir une valeur approchée de π. (...)

(...) La recherche d'une racine carrée ou d'une racine cubique, avec deux chiffres exacts, est comprise dans le programme des classes de sixième et de l'année préparatoire. D'une part, elle donnera aux élèves une première habitude de l'emploi de tables numériques ou de barèmes, dont l'usage est de plus en plus répandu à note époque. D'autre part, elle fournit de nouvelles applications des règles de déplacement de la virgule et associe ces règles à la détermination préalable de l'ordre de grandeur du résultat cherché.

(...) L'étude systématique des puissances de 10 et leur notation par exposants positifs et négatifs est prévue pour les classes de quatrième et la 2ème année d'enseignement primaire supérieur comme application des propriétés des produits. Elle permettra de donner quelques indications sur les mesures qui sont en dehors de nos perceptions humaines directes : longueurs, volumes et masses, soit à l'échelle astronomique, soit à l'échelle moléculaire.

Dans ces mêmes classes, il faut faire intervenir des considérations d'ordre de grandeur pour apprécier, d'une part les limitations, d'autre part les approximations des mesures des variables et des grandeurs expérimentales. Ces considérations sont indispensables pour le choix des échelles des graphiques et pour la compréhension même de ces graphiques. Il importe que des nombres dont les écarts peuvent résulter d'incertitudes (ou d'erreurs) de mesures ou d'expérience soient représentés par des points sensiblement confondus.

Dans les classes de troisième et en 3ème année, où l'on doit étudier des fonctions définies par des formules, on opérera de façon inverse ; les calculs de leurs valeurs numériques seront faits avec les approximations rendues nécessaires par les échelles des graphiques.

Dans ces classes on reviendra d'une façon plus systématique sur l'usage d'une table de carrés et du graphique correspondant, pour calculer un carré ou , inversement, une racine carrée. On pourra associer ce calcul soit à des problèmes de surfaces, soit à des problèmes de moyenne proportionnelle.

En cinquième, les instructions estiment qu'il est possible "d'esquisser modestement une théorie" de la numération décimale.

Le programme détaillé en donne les éléments essentiels : le chiffre des unités et le nombre des dizaines d'un nombre entier sont le reste et le quotient de sa division par 10. (...)

Un nombre décimal, 5,25 est une mesure qui peut : d'une part devenir un nombre entier par changement d'unité, 525 ; d'autre part être envisagée comme la somme de deux mesures, avec des unités différentes, 5 mètres et 25 centimètres
Le second point de vue est celui des nombres complexes.
Le premier permet de justifier les règles d'addition et de soustraction.

La représentation des nombres décimaux par les points d'une demi-droite facilite leur comparaison. (...)

La division d'un dividende D par un diviseur $\underline{d}$ est ,théoriquement, le problème inverse de la multiplication, c'est-à-dire la résolution de l'équation en $\underline{x}$
$D = \underline{d} \times \underline{x}$

Pratiquement, on recherche une solution approchée qui est : le quotient entier (ou à une unité près) ; ou le quotient avec un, deux ...., chiffres décimaux exacts (à un dixième, un centième..., près).

D'après cette théorie, un nombre décimal peut être traité comme un nombre entier. C'était déjà le point de vue des programmes de cours moyen en 1923. Ce qu'apporte l'enseignement secondaire est ici des systèmes d'écritures qui vont préfigurer l'algèbre.

Sans insister sur les postulats ou sur les démonstrations, il conviendra d'habituer les élèves à l'usage des inégalités et des signes d'inégalités, qui ne pouvait pas être étudié dans l'enseignement primaire élémentaire. Il s'étendra ensuite aux nombres algébriques.

Les quotients, dont l'étude doit accompagner la révision du système métrique dans les classes de sixième et dans l'année préparatoire, sont des valeurs de l'unité ou des valeurs spécifiques. Certains d'entre eux sont cités explicitement dans le programme détaillé : poids spécifique, volume spécifique, prix unitaire, vitesse.

La recherche de ce quotient suppose implicitement qu'il y a proportionnalité entre les deux grandeurs ; le quotient ou valeur à l'unité est le coefficient de proportionnalité. Il n'est pas indispensable d'employer ces mots ni de préciser davantage ces notions dans la classe de sixième ; il y aura lieu d'y revenir dans les classes de quatrième et troisième, deuxième et troisième années, avec l'étude des fonctions linéaires, monôme et binôme du premier degré.
On remarquera aussi que le quotient dépend des unités adoptées pour les deux grandeurs dividende et diviseur, et qu'il convient d'expliciter ces deux unités en indiquant la valeur spécifique.

Les problèmes dits de règle de trois se présentent dans de très nombreux exercices d'application. On les traitera en recherchant un résultat intermédiaire, qui sera le plus souvent un quotient et exceptionnellement un produit.

Le symbole habituel $\frac{a \times b}{c}$ représentera la suite de deux opérations qui seront, suivant le cas concret, étudiés, (a : c) x b ; a x (b : c) ; a x b) : c.

Il peut même être possible, dans certains problèmes, de l'envisager comme un double division :
a : (c : b) ou b : (c : a).
On retrouvera ainsi la notion de quotient inverse.

Les problèmes d'intérêt donnent des exemples de quotients où les grandeurs divisées sont de même espèce ; les échelles de dessin qui sont, en langage géométrique, des rapports de similitude, en donnent un autre exemple. Ces quotients sont indépendants de l'unité choisie ; on notera que leur expression en pour cent signifie des centièmes :
4,50 p. 100 est équivalent à 0,015.

Ces considérations préparent l'étude des fractions qui doit être faite dans les classes de cinquième et en 1ère année.

[Les instructions rappellent alors la conception de fraction de grandeur des instructions de 1920]
"Une fraction de grandeur se présente comme le produit de deux opérations successives, division de la grandeur considérée par un nombre entier, puis multiplication du résultat par un autre nombre entier... la fraction abstraite apparaît comme un multiplicateur (il vaudrait mieux dire un opérateur)... La division exacte de deux nombres décimaux acquiert son véritable caractère et le quotient se présente sous forme de fraction ordinaire..."

[L'étude des rationnels est prévue en quatrième seulement. Les instructions les décrivent en se référant à la fois aux propriétés mathématiques et aux nécessités de préparer le calcul algébrique]
Dans cet ensemble, l'addition et la multiplication sont commutatives et associatives, et la multiplication est distributive par rapport à l'addition. Les opérations inverses, soustraction et division, sont possibles (sauf pour un diviseur nul) et donnent un résultat unique. Ces considérations serviront à justifier les règles du calcul algébrique en montrant que deux expressions (monômes ou polynômes) identiques ont les mêmes valeurs numériques, pour les mêmes valeurs des lettres.

Classes de cinquième classique et moderne (1947)
(horaire hebdomadaire : deux heures et demie)

Arithmétique
Numération décimale.
Addition, soustraction, multiplication et division des nombres entiers ; quotient de deux nombres entiers à une unité près.
(...) Fractions de grandeurs. Notion de fraction. Fractions égales. Opérations sur les fractions exposées à partir de problèmes concrets.
Fractions décimales.
Nombres décimaux. Opérations sur les nombres décimaux. Quotient de deux nombres entiers ou décimaux à une approximation décimale donnée. (...)
Problèmes concrets, dont les données sont numériques, conduisant à une équation du premier degré à une inconnue. Choix des unités, changements d'unités. (...)

Programmes officiels publiés au bulletin officiel du 25 juillet 1960
Les programmes des classes de 6° et 5° n'apportent, formellement, que peu ou pas de connaissances nouvelles pour l'enfant, mais il ne n'agit pas, pour autant, ni d'une répétition ni d'une révision plus ou moins détaillée du programme du "cours moyen".

Les mécanismes acquis dans les classes antérieures doivent être soigneusement entretenus, on saisira toute occasion (et on en fera naître) d'entraîner l'élève aux diverses opérations du calcul.

Le "calcul mental" sera le plus souvent possible mis à contribution. (...) L'automatisme de la "règle de trois" pourra être fructueusement brisé par le recours à des suites de nombres proportionnels ou à la notion de pourcentage. L'intérêt du recours aux suites de nombres proportionnels est augmenté par le fait que l'enfant trouve là le premier exemple de correspondance entre les éléments de deux ensembles : il sera facile d'aller plus loin et de mettre en évidence le fait qu'il existe d'autres types de correspondance que la proportionnalité.

Des "travaux pratiques" sont institués pour faciliter le passage à l'abstraction.
Il a paru que le moyen le plus certain (...) de ne pas éloigner, en les rebutant, nos jeunes élèves de la culture mathématique consistait à faire systématiquement appel à des "travaux pratiques". Guidé par le maître et réalisant d'abord des opérations concrètes appliquées à des objets donnés, l'enfant arrivera à acquérir la notion abstraite d'une opération d'une nature bien définie mais portant sur un élément indéterminé. Puis il deviendra capable d'imaginer qu'il applique une autre opération au résultat de la première sans l'avoir réalisée. Enfin, concevant la suite des mécanismes des opérations ainsi définies, il pourra prévoir certaines propriétés des résultats : il aura réalisé sa première démonstration. (...) Le succès sera atteint lorsque l'élève, ayant pris conscience de la différence qui sépare une vérification expérimentale, même recommencée cent fois, d'une démonstration, en viendra à ne pas se contenter de la première et à exiger la seconde. (...)
Il se trouve fort heureusement que la méthode ainsi conseillée, qui est destinée à former des mathématiciens nombreux, se trouve aussi particulièrement efficace pour ceux qui ne deviendront pas ingénieurs ou professeurs, soit qu'ils se trouvent attirés vers des occupations scientifiques plus techniques, soit que toute voie scientifique leur soit fermée.

Il est clair en effet que tous les enfants ont intérêt à cultiver leur sens du réel, leur adresse, leur imagination. Certains verront se développer leur esprit d'analyse, d'autres leur esprit déductif, d'autres encore leur intuition. Toute une catégorie d'enfants qui ne pourront franchir le pont qui les conduirait jusque dans le domaine de l'abstraction retireront de leurs efforts le sens du "raisonnement expérimental", raisonnement non cartésien peut-être fruit de l'intuition étayée par un solide empirisme, indispensable à qui veut diriger des techniciens.

Classe de sixième (1960)
Programme de la classe
I.- Segments de droite, droite, demi-droite ; égalité des segments.
Addition ; multiples et sous-multiples d'un segment.
Mesure des longueurs ; unités.

II- Angles (première étude). Définition ; égalité; addition; multiples et sous-multiples d'un angle. Mesure des angles : unités. Opérations sur les nombres représentant des mesures d'angles en degrés, minutes et secondes.

III- Cercles (première étude)
(...) Mesure expérimentale des nombres mesurant un arc (en degrés par exemple) et la longueur de cet arc (en centimètres par exemple). (...)

V.- Mesure du temps : unités.
Opérations élémentaires sur les nombres représentant les durées exprimées en heures, minutes et secondes.

VI- Définitions relatives aux polygones (..) Notions sur la mesure des aires, unités. Aire du rectangle, du triangle, du trapèze. Formule donnait l'aire du cercle.

VII.- Définitions relatives à quelques solides : cubes, parallélépipèdes rectangles (...)
Notions sur la mesure des volumes et des capacités ; unités. (...)
Formules donnant les volumes d'une pyramide régulière, d'un cône de révolution.
Formules donnant l'aire et le volume de la sphère.

VIII.- Mesure des poids : balance. Poids spécifique.
IX.- Mouvements uniformes. Vitesse.
X.- Pourcentages : intérêts simples.

Travaux pratiques(...) La notion d'échelle d'un dessin ou d'un plan sera introduite à l'occasion d'exercices de représentation de figures ou d'objets.

(...) Les exercices pratiques d'arithmétique pourront consister en construction de tables de valeurs numériques, de tables de correspondance entre les mesures de deux grandeurs liées, de calculs faits à partir d'une formule littérale dans laquelle on donne aux lettres diverses valeurs numériques.

Classe de cinquième
Programme de la classe
Arithmétique
I.- Nombres entiers (...)
4° Multiples d'un nombre, diviseurs d'un nombre.
Problème de la division : quotient exact, quotient à une unité près et reste.
Pratique de la division.

II.- Nombres fractionnaires
1° Fractions de grandeurs (segments, angles, arcs d'un même cercle...). Notion de fraction. Fractions égales, fractions inégales.
Simplification ; réduction à un même dénominateur.
2° Opérations sur des fractions (présentées en liaison avec des problèmes concrets).
Multiplication, produit, propriétés de la multiplication (..)
Problème de la division : quotient exact ; inverse d'un nombre. Propriétés du quotient exact.(...)
3° Fractions décimales ; nombres décimaux.
Pratique de l'addition, de la soustraction, de la multiplication des nombres décimaux.
Division d'un nombre par un autre (nombres entiers, fractionnaires, décimaux) ; quotient exact ; quotients approchés à une unité près, à un dixième près, à un centièmes près.
Pratique de l'opération.

Note.- L'étude des diverses questions concernant les nombres entiers et les nombres fractionnaires a donné lieu, bien entendu, à une introduction progressive de l'emploi des lettres (arithmétique littérale). Il est recommandé, à la fin de cette étude, de faire le bilan des résultats essentiels ainsi acquis, de les énoncer avec précision, et de les résumer en quelques formules, accompagnées d'une légende rappelant la signification des lettres qui y figurent.

III.- Application
Résolution de problèmes concrets, dont les données sont numériques, et dont l'inconnue est représentée par une lettre. (Il s'agit seulement de problèmes au sujet desquels ne doit point se poser pratiquement la question de l'existence des éléments que l'on recherche, et dont la solution peut être calculée par l'application des propriétés des opérations élémentaires de l'arithmétique.)

Travaux pratiques
La présentation des notions d'arithmétique et de géométrie du programme de cinquième trouve ses points de départ dans le domaine concret : elle doit être fondée sur des observations et des expériences (...).

Commentaires.
(...) Il convient d'attirer l'attention sur l'importance de la partie du programme d'arithmétique qui concerne la construction progressive des nombres et la découverte de leurs propriétés : c'est sur cette base que s'édifiera, un peu plus tard, l'algèbre. Elle doit donc être établie avec beaucoup de soin en partant du domaine concret, en s'aidant de travaux pratiques variés, pour aborder la voie de la généralisation et de l'abstraction. (...)

Classes de sixième I et II (1968)

I.- Relations

(...) Sur des exemples concrets, description précise de relations et de leurs propriétés. Représentation dans le cas d'ensembles finis par des tableaux de correspondance ou par des flèches. Exemples et représentations graphiques de relations numériques.

II.- Nombres entiers et décimaux

Contrôle de l'acquisition de la technique et du sens des opérations sur les nombres entiers en base dix et sur les nombres décimaux : addition, soustraction, multiplication. Emploi des signes $\leq$, $<$, $\geq$, $>$.

Exercices sur d'autres systèmes de numération.

Ordre de grandeur d'un résultat. Calcul mental : exercices sur des additions et multiplications de plusieurs entiers.

III.- Étude d'objets géométriques et physiques donnant lieu à mesures (choix d'une unité, ordre de grandeur, encadrement).

(...) b) Cercle, longueur. Arcs de cercle et secteurs angulaires.(...)

d) Solides : cubes, parallélépipèdes rectangles, prismes droits, cylindres de révolution, pyramides, cônes de révolution ; volumes, masses, masses volumiques.

e) Durées. Vitesse d'un mouvement uniforme. Débits.(...)

V.- Nombres relatifs

Exemples introduisant les nombres relatifs, entiers et décimaux : somme de deux ou plusieurs nombres et différence de deux nombres. Exemples concrets correspondants.

Classes de cinquième I et II

(...)

II. - Arithmétique

Ensemble des multiples d'un nombre ; division euclidienne d'un nombre naturel par un nombre naturel. (...)

III.- Nombres relatifs

a) Nombres relatifs, entiers et décimaux. Somme et différence.

Opposé d'un relatif, opposé d'une somme, opposé d'une différence ; application à des calculs comportant des additions et des soustractions de sommes et de différences.

Produit d'un nombre relatif par un nombre naturel (somme répétée) : produit d'une somme, d'une différence par un nombre naturel.

Nombres positifs, nombres négatifs. Ordre sur les nombres relatifs.

Valeur absolue, notation /x/. Ordre et addition.

b) (A n'aborder que lorsque les notions concernant l'addition et l'ordre seront bien comprises)

Produit de deux nombres relatifs (décimaux) ; produit de plusieurs nombres. Puissances entières positives, nulle d'un même nombre.

Produit de deux puissances. Puissance d'un produit.

Produit d'une somme par un nombre relatif ; mise en facteur.

Ordre et multiplication.

Instructions particulières pour les classes de sixième et cinquième (1968)

(...) Alors que le programme de sixième de 1960 visait surtout à greffer un souci de pensée et un mode d'expression sur des techniques acquises à l'école primaire, le programme de sixième de 1968 élabore des notions qui sont en bonne partie nouvelles pour les élèves provenant du cours moyen, et le programme de cinquième poursuit cette élaboration dans une progression continue.

Ces programmes ont été établis en relation avec des expériences groupées dans divers centres, et dont a connu la commission ; ces expériences se proposaient de renouveler à la fois le contenu de

l'enseignement et son style, leur bilan est en cours ; les professeurs s'en informeront, ils ne se croiront pas liés par elles (...).
Selon les vues de la commission, les programmes du cycle d'observation forment le début d'une chaîne aux soudures étudiées, comportant le minimum de recouvrements partiels ; à chaque année suffit sa tâche (...).

Le chapitre 2 du programme de sixième vise, en particulier, à entretenir chez les élèves la pratique des opérations, acquise au cours moyen, sur les nombres entiers et sur les nombres décimaux. "Contrôler le sens des opérations" ne doit pas inciter le professeur à faire un "théorie" de ces opérations, mais à insister sur les circonstances de leur emploi. A ce sujet, il n'y a pas à faire précéder les opérations sur les nombres décimaux d'une étude de fractions décimales ; c'est ainsi que la multiplication de 1,2 par 2,35 traduira simplement la recherche du nombre de carrés de 1 cm de côté, intérieurs à un rectangle dont les côtés mesurent 120 cm et 235 cm ; le carré de 1 m de côté contenant 10 000 carrés de 1 cm de côté, il suffit de se reporter à la définition des nombres décimaux pour qu'une règle de formation du produit s'en dégage intuitivement ; les élèves relieront cette présentation à leurs souvenirs du cours moyen, concernant l'aire du rectangle lors d'un changement d'unités du système métrique.

La division a été exclue du programme de sixième, parce que le quotient de deux nombres décimaux n'est pas, en général, un nombre décimal ; en cinquième, les élèves apprendront la technique de la division euclidienne d'un nombre naturel par un nombre naturel ; ce n'est qu'en quatrième qu'ils feront connaissance avec les nombres rationnels et qu'ils poseront le problème du quotient de deux nombres décimaux.

On rencontrera pourtant la division au chapitre 3 du programme de sixième, à propos des mesures liées à des objets mathématiques ou physiques : il est naturel de chercher le rayon d'un cercle dont on connaît le longueur ; les notions de masse volumique, de débit, de vitesse, introduisent des divisions. On se bornera alors à entretenir les souvenirs de l'école primaire, sans y apporter du nouveau ; d'ailleurs, les notions physiques qui viennent d'être envisagées ne conduisent, dans la pratique, qu'à la recherche de valeurs approchées.(...)

On habituera progressivement les élèves à représenter par des lettres des nombres dont l'existence n'est pas à mettre en cause ; en particulier, on pourra résoudre des problèmes concrets dont les données sont numériques et dont l'inconnue est représentée par une lettre.
Nombres relatifs (sixième et cinquième)

On observera d'abord divers changements dans un certain ordre traditionnel de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre.

La commission a voulu éviter les blocages que provoque dans bien des jeunes esprits l'étude approfondie des fractions et elle a reporté cette étude en quatrième ; il n'est sans doute pas exclu de garder dans cette attente une pratique élémentaire des quelques fractions usuelles rencontrées au cours moyen, mais leur place sera limitée.
(...) Les exemples qui ont servi à introduire les nombres relatifs, entiers et décimaux, conduiront de façon naturelle aux définitions de l'addition et de la soustraction, aux calculs d'une somme et d'une différence. Mais la multiplication est exclue à dessein du programme de sixième ; dès que le multiplicateur n'est plus un entier naturel, l'introduction de la multiplication comporte des difficultés qu'il convient de n'aborder qu'une fois totalement maîtrisées les notions d'addition et de soustraction. (...)

Travaux pratiques (sixième et cinquième)
L'étude de chacun des chapitres du programme de sixième et de cinquième s'accompagne de travaux pratiques, qui servent à présenter une notion, à préciser ou à illustrer une définition, à vérifier un résultat ou une formule, à suggérer quelque problème nouveau. (...)
La notion d'échelle d'un dessin ou d'un plan sera introduite à l'occasion d'exercices de représentation de figures ou d'objets, à l'occasion aussi de repérages.(...)

On construira des tables de valeurs numériques dont on ne manquera pas, bien entendu, de se servir par la suite, des tables de correspondance entre les mesures de deux grandeurs liées, des tables de calculs faits à partir d'une formule littérale dans laquelle on donne aux lettres diverse valeurs numériques successives.

On pourra aussi trouver des thèmes de travaux pratiques dans des éléments d'astronomie, en liaison avec la géographie ; ce n'est là qu'un cadre dans lequel le professeur pourra, s'il le désire, puiser des sujets d'observation et d'étude adaptés au niveau des élèves, aux goûts qu'ils manifestent, aux moyens matériels dont il dispose. C'est ainsi que des mesures d'angles, des mesures de longueurs d'ombres, fournissent des éléments géométriques d'origine concrète ; la confection d'une table de valeurs mesurées ou relevées dans quelque document donne l'exemple d'une correspondance imposée par la nature des choses et non par la fantaisie d'un énoncé ; la résolution de quelques problèmes simples montre, mieux que des mots, que les mathématiques ont une utilité pratique.

Classe de sixième (1977)
(...) I.- Nombres décimaux
Contrôle de l'acquisition du sens des opérations sur les nombres décimaux : addition, soustraction, multiplication, division (exacte ou approchée) ; techniques d'exécution de ces opérations, vérifications.
Pratiques des symboles $<$, $\leq$, $>$, $\geq$.
Ordre de grandeur d'un résultat ; calcul mental (...)
Suites finies proportionnelles (1) ; calculs de pourcentages, exercices de changements d'unité.

(1) Deux suites sont proportionnelles si on passe de l'une à l'autre par une multiplication ou par une division, ou par une succession de telles opérations.

II.- Nombres décimaux relatifs
Exemples introduisant les nombres relatifs ; somme de deux ou plusieurs nombres ; différence de deux nombres. Exercice concernant le repérage d'un point sur une droite orientée, munie d'une origine et régulièrement graduée.

III.- Observation d'objets géométriques et physiques
(...) Unités usuelles de longueur, d'aire, d'angle. (...)
Aires du rectangle, du triangle, du trapèze, du disque, du secteur circulaire.

Classe de cinquième
(...) III.- Nombres relatifs
(...) 2° Nombres décimaux relatifs, pratique opératoire :
Somme, différence, ordre, valeur absolue.
Produit d'un nombre relatif par un entier naturel (...)
Produit de deux nombres relatifs (...).

IV.- Observation d'objets géométriques et physiques
(...) 2° (...) Reproduction d'un dessin fait sur fond quadrillé ; agrandissement et réduction d'un dessin.
3° (...) Calcul de volumes (...) Volume de la boule.
4° (En liaison avec la physique) Masse ; masse volumique. Durées : unités de temps et de vitesse. Débits.

Circulaire sur "le rôle dévolu à l'enseignement des mathématiques dans formation de l'élève de collège" [7]
Elle recommande de prendre comme points de départ des axiomes simples et "naturels", de privilégier les raisonnement courts, tout en reconnaissant que ce n'est pas toujours possible.
... certaines de ces notions, dont il est difficile de donner une définition qui soit à la fois simple et mathématique "correcte", appartiennent incontestablement au bagage instrumental et technique

[7] Circulaire n°77-157 du 29 avril 1977, Bulletin Officiel n°22 bis, 9/6/77.

dont il convient de doter l'élève au cours de sa scolarité de collège. Il est évident que dans ce cas une appréhension "concrète" de la notion suffit à l'élève, et que c'est la maîtrise des mécanismes qu'il faut rechercher, non une abstraction qui serait prématurée à ce niveau et donc préjudiciable à l'élève. L'exemple de la notion d'angle et du calcul trigonométrique est, à cet égard, digne d'être noté.[8]

La circulaire s'achève par une liste définissant les connaissances qu'un élève "moyen" devra posséder en fin d'année.

A la fin de la première année des collèges
I.- Très bonne pratique des quatre opérations sur les décimaux positifs.
Usage des parenthèses.
Usage pratique de la relation de proportionnalité ; application aux changements d'unités.
II.- Pratique de l'addition et de la soustraction sur les décimaux relatifs. (...)

A la fin de la seconde année des collèges
(...) III.- Sommes, différences, produits de décimaux relatifs, puissances entières d'exposant positif et d'exposant nul.
L'étude théorique de la relation d'ordre n'est pas au programme, mais les élèves devront savoir comparer deux décimaux relatifs. (...)

Programmes de 1985
Une diversification et une individualisation de l'enseignement sont nécessaires pour répondre aux problèmes posés par les difficultés de certains élèves et l'hétérogénéité des classes. La pédagogie ne permet de parvenir aux objectifs visés et aux connaissances essentielles que si elle favorise l'activité de l'élève, développe ses capacités de création et d'invention, et tient compte, sans les consacrer et pour les dépasser, des différences qui existent entre eux : différences d'âge, de sexe et d'habitudes, pluralité des origines ethniques, sociales et culturelles, degrés de maturité, niveaux des résultats.

Les textes officiels de mathématiques comportent désormais des compléments pour les enseignants, où figurent les connaissances exigibles.
Une distinction claire doit être établie entre :
- les activités prescrites par les programmes, qui doivent être aussi riches et diversifiées que possible,
- les connaissances exigibles, qui sont beaucoup plus restreintes que ce qui se fait en classe,
- les activités complémentaires éventuelles sur tel ou tel point.

Les programmes insistent en plusieurs endroits sur le caractère "outil" des mathématiques.

(...) Par exemple, pour l'acquisition des techniques opératoires sur les nombres décimaux, il ne suffit pas de décrire des placements de virgule et d'adjoindre éventuellement des zéros adéquats. Il est nécessaire d'étudier des situations dans lesquelles on a besoin d'opérer sur des nombres décimaux, et d'écrire un même décimal sous plusieurs formes (...). Une construction de courbe point par point peu être ainsi l'occasion d'une meilleure assimilation des techniques opératoires.

On devra donc privilégier l'activité de chaque élève. (...) Dès lors, les professeurs vont à avoir à choisir des situations créant un problème, dont la solution fera intervenir des "outils", c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles; Lorsque celles-ci auront été bien maîtrisées, elles fourniront à leur tour des "outils" qui permettront un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente.

[8] A l'époque, la communauté mathématique s'interrogeait sur les ambiguïtés du mot "angle" et les moyens pédagogiques d'enseigner "proprement" les différents concepts attachés à l'emploi de ce mot.

Classe de sixième (1985)

(...) <u>2. Travaux numériques</u>

En dehors du paragraphe 7, les nombres utilisés sont positifs.

1. Techniques opératoires (mentales ou écrites) sur les nombres entiers ou décimaux. Procédés de calcul approché : troncature et arrondi ; ordre de grandeur d'un résultat.

2. Écriture fractionnaire de décimaux et opérations +, -, x. (...)

3. Quotients de deux décimaux, écriture a/b ; approximations de ce quotient. Multiplication d'un décimal par a/b, avec a et b entiers (b ≠ 0)

4. Initiation aux écritures littérales (exemples formules d'aires...)

5. Rangement de nombres.

6. Équations du type 23 x r = 471,5 ou 2,05 / r = 8,2

7. (...) Exercices concernant le repérage d'un point sur une droite orientée munie d'une origine et régulièrement graduée.

<u>3.Organisation et gestion de données. Fonctions</u>

Exemples issus d'activités :

1 A base numérique :

Application d'un pourcentage à une valeur ; relevés statistiques ; opérateurs, et en particulier usage des opérateurs constants d'une calculatrice.

2. A base géométrique :

Calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle, du volume d'un parallélépipède rectangle, de la longueur d'un cercle.

On se servira de ces exemples, selon les cas, pour :

- décrire la situation par un tableau ou par des représentations graphiques,
- reconnaître, s'il y a lieu, une proportionnalité,
- déterminer une quatrième proportionnelle,
- effectuer un changement d'unité.

Classe de cinquième

(...) <u>2. Travaux numériques</u>

1. Nombres positifs :

Sur les nombres entiers et décimaux : conventions et priorités opératoires ; étude de $k\ (a + b)$ et $k\ (a - b)$.

Comparaison et addition de deux nombres en écriture fractionnaire de même dénominateur ; multiplication de deux nombres en écriture fractionnaire.

2. Nombres relatifs en écriture décimale :

Comparaison et rangement ; addition et soustraction ; réduction de sommes algébriques.

3. Équations numériques du type $a + x = b$ ou $ax = b$ $(a \neq 0)$

<u>3.Organisation et gestion de données. Fonctions</u>

Exemples de fonctions avec :

- description, traduction en tableaux ou par des représentations graphiques,
- reconnaissance, s'il y a lieu, d'une proportionnalité.

Ces exemples seront notamment issus d'activités :

-1. à base numérique : calcul d'un pourcentage, d'une vitesse moyenne ; relevés statistiques ; (...)

- 2. à base géométrique : échelles ; calcul de l'aire d'un parallélogramme, d'un triangle(...), de l'aire et du volume d'un cylindre de révolution.

Pour ce qui est des travaux numériques, les compléments insistent, autant en sixième qu'en cinquième sur la liaison entre sens des opérations, équations et résolution de problèmes concrets.

Classe de sixième
La résolution de problèmes concrets constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme (...)
Outre leur intérêt propre, ces problèmes doivent permettre aux élèves, en continuité avec l'école élémentaire, d'associer à une situation concrète un travail numérique et de mieux saisir *le sens des opérations et des équations* figurant au programme.

Classe de cinquième
Comme en sixième, la *résolution de problèmes concrets* constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. Ces problèmes, en associant à une situation concrète une activité numérique, renforcent le *sens des opérations et des équations* figurant au programme et développent les *qualités d'organisation et de gestion* de données numériques. Il convient donc de ne pas multiplier les activités de technique pure.
L'initiation aux écritures littérales se poursuit, mais le calcul littéral ne figure pas au programme. (...)

L'invitation à recourir à des problèmes concrets, relevant de la vie courante ou d'autres disciplines est réitérée à la rubrique "Organisation et gestion de données - Fonctions". Quelques exemples sont indiqués dans la liste des compétences exigibles.

Classe de sixième
Appliquer un taux de pourcentage.
Effectuer, éventuellement avec une calculatrice, des calculs sur les mesures de grandeurs figurant au programme.
Effectuer, pour les longueurs et les aires, des changements d'unités de mesure.

Classe de cinquième
Sur une droite graduée :
- lire l'abscisse d'un point donné,
- placer un point d'abscisse donnée,
- calculer la distance de deux points d'abscisses données.

(...)
Calculer et utiliser l'échelle d'une carte ou d'un dessin.
Calculer une vitesse moyenne.
Calculer un pourcentage.

Les écritures fractionnaires de décimaux, introduites, en sixième, sont présentées comme une préparation à l'étude des fractions. C'est le même esprit qui justifie l'introduction des quotients de décimaux.

2.2 Écriture fractionnaire de décimaux
Les travaux conduiront à l'écriture d'un nombre décimal sous diverses formes fractionnaires : initiation à la manipulation des fractions. Les techniques des opérations +, -, x ne seront exposées que dans le cas d'écritures fractionnaires ayant pour dénominateurs des puissances de dix, et cela en liaison étroite avec les techniques opératoires en écriture décimale. (...)

2.3 Quotient de décimaux
Il s'agit ici d'un simple jalon vers un élargissement des opérations. Dans ce paragraphe, on travaille uniquement sur des exemples numériques et au travers de problèmes. Ces travaux dégagent et utilisent les deux idées suivantes :
- le quotient a/b de deux nombres décimaux est un nombre qui multiplié par b donne a,
- on ne change pas le quotient quand on multiple a et b par un même nombre non nul.

La multiplication d'un nombre décimal par un quotient intervient, en particulier, dans des problèmes de proportionnalité.

Programmes de 1995

Les mathématiques comme discipline de formation générale

Au collège, les mathématiques contribuent, avec d'autres disciplines, à entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. (...)

A travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique (...).

L'outil mathématique

Les méthodes mathématiques mathématiques s'appliquent à la résolution de problèmes courants. Elles sont cependant leur autonomie propre qui leur permet d'intervenir dans des domaines aussi divers que les sciences physiques, les sciences de la vie et de la terre, la technologie, la géographie... (...)

Les mathématiques comme discipline d'expression

(...) Ainsi que d'autres disciplines, les mathématiques ont en charge l'apprentissage de différentes formes d'expression autres que la langue usuelle (nombres, figures, graphiques, formules, tableaux, schémas). (...)

Chacune des rubriques des programmes vise certains objectifs.

Travaux numériques :

- acquérir les différentes manières d'écrire des nombres (écriture décimale, écriture fractionnaire, radicaux) et les traitements correspondants,
- se représenter la droite graduée complète, avec son zéro séparant les valeurs positives et négatives, et apprendre à y localiser les nombres rencontrés,
- assimiler progressivement le langage algébrique et son emploi pour résoudre des problèmes.

Organisation et gestion de données, fonctions :

- maîtriser différents traitements en rapport avec la proportionnalité,
- se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aires, volumes, durées) (...).

Les méthodes d'enseignement recommandées sont les mêmes que pour les programmes de la période précédente. Les contenus de la partie numérique sont quasiment identiques aux précédents, en revanche, les commentaires diffèrent souvent.

2.2. Nombres entiers et décimaux : écriture et opérations

Commentaires

On consolidera et on enrichira les acquis de l'école élémentaire relatifs à la numération et au sens des opérations en les mobilisant dans l'étude de situations rencontrées au collège. On tendra ainsi à ce que la maîtrise des techniques opératoires devienne suffisante pour ne pas faire obstacle à la résolution de problèmes.

La multiplication et la division par une puissance de dix sont à relier à des problèmes d'échelles ou de changements d'unités.

La multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de sixième tant du point de vue du sens que de la technique.[9]

La division est une opération en cours d'acquisition en début de collège. (...) Aucune compétence n'est exigible quant à la technique de division à la main de deux décimaux.

Quotient de deux nombres entiers

A l'école élémentaire, l'écriture fractionnaire a été introduite par des situations de partage.[10]

Les activités poursuivies en sixième s'appuient sur deux idées :

---

9 Prise en compte des changements apportés au programme de l'école primaire.

10 Les textes officiels de l'école primaire ne le mentionnent pas, mais c'est effectivement l'usage le plus répandu.

- le quotient a/b est un nombre,
- le produit de a/b par b est égal à a.

Ceci permet de considérer un nombre tel que 4/3 comme quatre fois un tiers, le tiers de quatre ou encore le nombre dont le produit par trois est égal à quatre.

Dans des situations de proportionnalité, le quotient de deux nombres est utilisé comme un opérateur. On visera aussi à lui faire acquérir le statut de nombre au travers de multiples activités : repérage (placement sur une droite graduée), mesure, calcul (possibilité d'utiliser un quotient a/b dans un calcul, sans effectuer nécessairement la division de a par b). (...)

On étendre le travail fait sur des entiers à des égalités telles que 5,24 / 2,1 = 524 / 210, par exemple en utilisant la calculatrice ou en ayant recours à des changements d'unités. (...)

2.3. Nombres décimaux en écritures décimales et fractionnaires

Compétences exigibles

(...) Ranger des nombres donnés en écriture décimale.

Sur une droite graduée :
- lire l'abscisse d'un point ou en donner un encadrement,
- situer un point d'abscisse donnée.

Commentaires

(...) Les écritures fractionnaires et décimales pourront être utilisées comme des moyens de contrôle mutuel des opérations sur des nombres décimaux. C'est dans ce seul cas que seront rencontrées les opérations (+, -, x) en écriture fractionnaire telles que :

32/10 + 7/100 = 327/100

ANNEXE AU CHAPITRE V

LETTRE DE PRÉSENTATION DES SUGGESTIONS

Jeanne BOLON
IUFM, centre de Versailles
BP 171, 78001 VERSAILLES CEDEX
Tél : (1) 39 24 20 69
Télécopie : (1) 39 24 20 99

Mai 1994

L'ENSEIGNEMENT DES DÉCIMAUX : PROPOSITION DE COLLABORATION POUR 1994-95

L'enseignement des décimaux ne donne pas satisfaction (cf. évaluations du début de sixième et celles de l'APMEP). Des recherches en didactique ont eu lieu ; elles ont été répétées plusieurs années, mais se sont déroulées dans des conditions particulières. De l'avis de la majorité des enseignants de fin d'école primaire ou de début de collège, ces progressions expérimentales ne peuvent être appliquées telles quelles dans les classes ordinaires.

Comment, néanmoins, tirer parti de ces productions expérimentales ? Que peut-on transposer à moindre frais ? C'est l'objet de la thèse que je prépare sous la direction de Gérard VERGNAUD.

Pour cela, j'ai désarticulé les progressions expérimentales, et j'en ai tiré des "suggestions de scénarios pédagogiques" faisables en une, deux ou trois séances de 50 minutes. J'y ai adjoint des scénarios de mon cru. Ce sont des exercices de découverte, des résolutions de problèmes ou des exercices d'entraînement. Les thèmes traités ne se limitent pas aux décimaux : on y trouve aussi les fractions, la proportionnalité, les grandeurs.

Ces suggestions sont destinées à des classes de CM1, CM2, sixième et cinquième. A chaque niveau, il y a des suggestions qui sont hors sujet du point de vue des algorithmes sous-jacents, mais on peut alors les traiter comme des résolutions de problèmes.

Je cherche des enseignants prêts à utiliser *certaines* suggestions, celles de leur choix parmi la douzaine rédigée. Le nombre des suggestions n'est pas imposé. Il n'y a aucune obligation de les respecter à la lettre : elles peuvent être à nouveau désarticulées, modifiées, découpées...

Je demanderai ensuite aux enseignants de me dire ce qu'ils ont repris, découpé, modifié, etc., si le produit obtenu leur a facilité la vie, comment ils ont sélectionné les suggestions. Cela se passera sous forme d'entretien (je me rendrai au lieu souhaité par l'enseignant).

J'aimerais connaître le manuel utilisé dans la classe, la progression annuelle, et disposer durant l'été 1995 de deux cahiers d'élèves incluant les interrogations écrites et les devoirs (cahiers choisis par l'enseignant). Si cette demande gêne certains enseignants, j'essaierai de m'en passer... Il suffit que j'en aie quelques-uns.

Les suggestions seront disponibles à la fin du mois de mai 1994. Je les présenterai aux enseignants volontaires. Les autorisations officielles seront demandées par l'intermédiaire de l'IUFM de Versailles (sous-direction de la recherche).

Un grand merci pour votre aide.

J. Bolon

ANNEXES AU CHAPITRE VI

LE TEST DE SEPTEMBRE 1994

NOM :

Classe

Exercice 1

Ne rien écrire dans la colonne

a. Effectue la multiplication :

2,3 × 10

Réponse : ____________________

a) 1 5 6 9 0 — 1

b. Effectue la multiplication :

35,2 × 100

Réponse : ____________________

b) 1 5 6 9 0 — 2

c. Effectue la division :

630 : 10

Réponse : ____________________

c) 1 9 0 — 3

d. Effectue la division :

936,7 : 100

Réponse : ____________________

d) 1 3 5 9 0 — 4

Exercice 4

Ne rien écrire dans la colonne

Combien de morceaux de ficelle mesurant chacun 4 mètres de long peuvent être coupés dans une ficelle de 39,2 mètres de long ?

Réponse : ____________________

1 9 0 — 12

Quelle longueur de ficelle restera-t-il ?

Réponse : ____________________

1 5 9 0 — 13

Exercice 9

Ne rien écrire dans la colonne

Avec un pot de 6 kg de peinture, on peint une surface de 15 m².
Avec un pot de 10 kg de peinture, on peint une surface de 25 m².

Combien de m² peut-on peindre avec 16 kg de peinture ?

1 9 0
19

Combien de kg de peinture faut-il pour peindre 50 m² ?

1 9 0
20

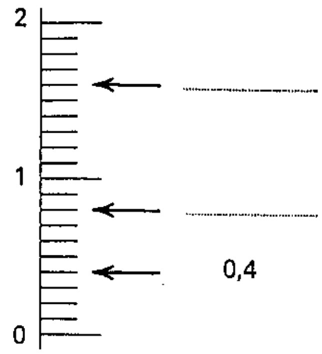
Combien de m² peut-on peindre avec 4 kg de peinture ?

1 9 0
21

Exercice 13

Sur la graduation ci-dessous, à quels nombres décimaux correspondent les flèches ?

Écris tes réponses à côté des flèches.



1 9 0 29

1 9 0 30

Exercice 19

Ne rien écrire dans la colonne

a. Effectue l'addition :

$$\begin{array}{r} 6\,493 \\ +\quad 604 \\ +\quad 39 \\ +\quad 143 \\ \hline \end{array}$$

a) 1 9 0 46

b. Effectue la multiplication :

$$\begin{array}{r} 204 \\ \times\quad 20 \\ \hline \end{array}$$

b) 1 5 9 0 47

c. Effectue la multiplication :

10 × 2,3

Réponse : ....

c) 1 5 6 9 0 48

d. Effectue la division :

4 584 : 8

Réponse : ....

d) 1 9 0 49

Exercice 15

Ne rien écrire dans la colonne

Tu feras cet exercice sans poser d'opération.

1. Martine affirme que :

   « 72 × 1,9 est proche de 140. »

   Es-tu d'accord avec Martine ou non ?
   Explique pourquoi.

1) 1 3 5 9 0 35

2. Une classe de collège compte en moyenne 25 élèves. Le nombre d'élèves dans un collège de 21 classes est proche de :

   300 400 500

   a. Entoure la réponse qui te semble la plus proche du résultat.

   b. Explique ton choix :

2) 1 3 4 9 0 36

Ministère de l'Éducation nationale — Direction de l'Évaluation et de la Prospective (DEP)

Exercice 16

Ne rien écrire dans la colonne

a. Effectue l'addition :

$$\begin{array}{r} 674 \\ +\,496 \\ \hline \end{array}$$

a) 1 9 0 37

b. Effectue la soustraction :

$$\begin{array}{r} 453 \\ -\,246 \\ \hline \end{array}$$

b) 1 5 6 9 0 38

c. Effectue la soustraction :

8,73 - 5

Réponse : ______________________

c) 1 5 9 0 39

Exercice 17

Calcule :

a. 18,5 + 3,67 =

a) 1 5 6 9 0 40

b. 6,48 - 4,6 =

b) 1 6 7 9 0 41

c.

$$\begin{array}{r} 75 \\ -\;\;8,37 \\ \hline \end{array}$$

c) 1 6 9 0 42

Ministère de l'Éducation nationale – Direction de l'Évaluation et de la Prospective (DEP)

Exercice 7

Ne rien écrire dans la colonne

a. Trace un segment [MN] de longueur 6,5 cm.

× M

a) 1 2 5 9 0 16

Exercice 24

Calcule :

$$\begin{array}{r} 63,4 \\ \times \quad 2,12 \\ \hline \end{array}$$

1 5 6 9 0 57

Exercice 25

Range les nombres suivants du plus petit au plus grand :

7,25 7,8 6,148 7,09

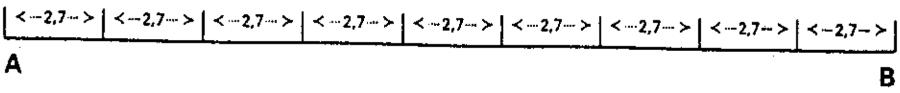
....

1 5 9 0 58

Exercice 32

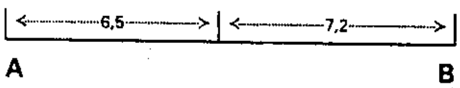
Ne rien écrire dans la colonne

Entoure l'opération qui permet de calculer la distance de A à B dans chacun des cas suivants :



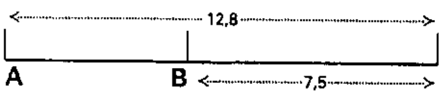
2,7 + 9	9 : 2,7	9 - 2,7
2,7 × 10	2,7 × 9	2,7 - 9

1 9 0
74



6,5 × 7,2	6,5 + 7,2
7,2 - 6,5	7,2 : 6,5

1 9 0
75



12,8 : 7,5	12,8 × 7,5	7,5 - 12,8
12,8 - 7,5	12,8 + 7,5	12,8 : 2

1 5 6 9 0
76

Ministère de l'Éducation nationale — Direction de l'Évaluation et de la Prospective (DEP)

LE TEST DE JUIN 1995

NOM :   Classe

Exercice 1

Ne rien écrire dans la colonne

a. Effectue la multiplication :

2,3 × 10

Réponse : ____________

a) 1 5 6 9 0 — 1

b. Effectue la multiplication :

35,2 × 100

Réponse : ____________

b) 1 5 6 9 0 — 2

c. Effectue la division :

630 : 10

Réponse : ____________

c) 1 9 0 — 3

d. Effectue la division :

936,7 : 100

Réponse : ____________

d) 1 3 5 9 0 — 4

Exercice 4

Ne rien écrire dans la colonne

Combien de morceaux de ficelle mesurant chacun 4 mètres de long peuvent être coupés dans une ficelle de 39,2 mètres de long ?

Réponse : ____________

1 9 0 — 12

Quelle longueur de ficelle restera-t-il ?

Réponse : ____________

1 5 9 0 — 13

Exercice 7

Trace un segment [MN] de longueur 4,8 cm

1 2 5 9 0 *16*

M x

Exercice 9

Avec un pot de **6 kg** de peinture, on peint une surface de **15 m²**.
Avec un pot de **10 kg** de peinture, on peint une surface de **25 m²**.

Combien de mètres carrés peut-on peindre avec **16 kg** de peinture ?

1 9 0 *19*

Combien de kilogrammes de peinture faut-il pour peindre **50 m²** ?

1 9 0 *20*

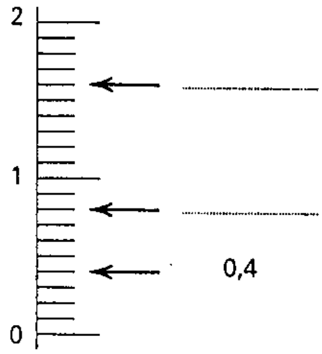
Combien de mètres carrés peut-on peindre avec **4 kg** de peinture ?

1 9 0 *21*

Exercice 13

Sur la graduation ci-dessous, à quels nombres décimaux correspondent les flèches ?

Écris tes réponses à côté des flèches.



1 9 0 — 29

1 9 0 — 30

Exercice 19

Ne rien écrire dans la colonne

a. Effectue l'addition :

$$\begin{array}{r} 6\,493 \\ +\ 604 \\ +\ 39 \\ +\ 143 \\ \hline \end{array}$$

a) 1 9 0 — 46

b. Effectue la multiplication :

$$\begin{array}{r} 204 \\ \times\ 20 \\ \hline \end{array}$$

b) 1 5 9 0 — 47

c. Effectue la multiplication :

10 × 2,3

Réponse : ....

c) 1 5 6 9 0 — 48

d. Effectue la division :

4 584 : 8

Réponse : ....

d) 1 9 0 — 49

Exercice 16

Ne rien écrire dans la colonne

a. **Effectue l'addition :**

```
  674
+ 496
-----
```

a) 1 9 0 37

b. Effectue la soustraction :

```
  453
- 246
-----
```

b) 1 5 6 9 0 38

c. Effectue la soustraction :

8,73 − 5

Réponse : ____________________

c) 1 5 9 0 39

Exercice 17

Calcule :

a. 18,5 + 3,67 =

a) 1 5 6 9 0 40

b. 6,48 − 4,6 =

b) 1 6 7 9 0 41

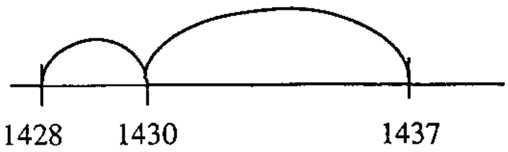
c.

```
  75
-  8,37
-------
```

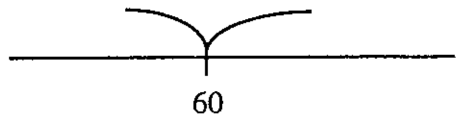
c) 1 6 9 0 42

Exercice 15

*Par rapport à **1430**,*
1428 est plus proche
de 1430 que 1437.



1- Par rapport à **60**, quel est le nombre le plus proche :

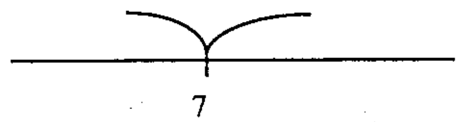


60,3 ou 59,3 ?

Réponse : ....

1) 1 9 0
35

2- Par rapport à **7**, quel est le nombre le plus proche :



6,9 ou 7,08 ?

Réponse : ....

2) 19 0
36

Exercice 24

On a calculé 63,5 x 2,12.
Le résultat est un des nombres suivants.Trouve-le, sans poser l'opération.

134,620 13,462 1346,200 134,62

1 5 6 9 0
57

Exercice 25

Range les nombres suivants du plus petit au plus grand :

7,25 7,8 76,148 7,09

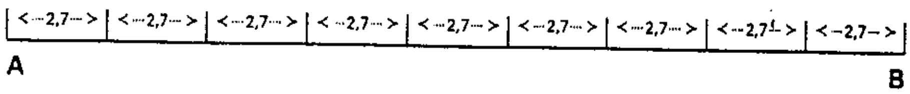
....

1 5 9 0
58

Exercice 32

Ne rien écrire dans la colonne

Entoure l'opération qui permet de calculer la distance de A à B dans chacun des cas suivants :



2,7 + 9   9 : 2,7   9 - 2,7

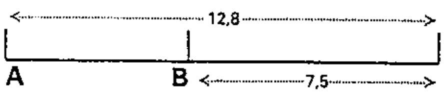
2,7 × 10   2,7 × 9   2,7 - 9

1 9 0
74

6,5 × 7,2   6,5 + 7,2

7,2 - 6,5   7,2 : 6,5

1 9 0
75



12,8 : 7,5   12,8 × 7,5   7,5 - 12,8

12,8 - 7,5   12,8 + 7,5   12,8 : 2

1 5 6 9 0
76

L'ANALYSE DES RÉPONSES AUX DEUX TESTS

Nous avons voulu connaître le niveau des élèves des classes associées à l'expérimentation, au début et à la fin de l'année scolaire 1994-95. En effet, l'opinion que peuvent avoir les enseignants sur la pertinence d'un matériel pédagogique dépend en particulier des possibilités du milieu scolaire de travail. Nous avons choisi de comparer les différentes classes entre elles, par niveau scolaire et entre niveaux scolaires.

Nous avons extrait du test national de la direction de l'évaluation et de la prospective (DEP) des exercices en lien avec les décimaux.

Nous avons voulu illustrer les thèmes suivants : le calcul numérique (nombres entiers, nombres décimaux), l'utilisation de la règle graduée, la proportionnalité, le calcul approché, le sens des opérations sur les décimaux. Les exercices retenus ont été présentés dans un ordre différent de celui induit par l'ordre du cahier officiel, pour des raisons de mise en page. Nous avons toutefois conservé de la présentation originale les premiers exercices et le dernier.

Nous nous sommes limités à 12 exercices, pour que la passation ne soit pas trop longue, en particulier dans les classes primaires. Pour les classes de sixième, nous avons demandé aux enseignants concernés de nous faire parvenir des extraits des relevés faits dans leur établissement en début d'année (logiciel *Casimir*). Pour les autres classes, nous avons fourni un questionnaire en sept pages, avec les consignes correspondantes du cahier de la DEP.

A la fin de l'année, nous avons repris le même questionnaire sauf pour deux exercices dont les réponses nous avaient paru difficiles à interpréter.

Les questionnaires ont été soumis aux élèves sous la responsabilité de leur enseignant, en notre absence. Nous avons assuré nous-même le dépouillement et la saisie des données correspondant aux 29 items. Les enseignants ont reçu les résultats individuels de leur classe et des indications sur les scores globaux de classes de même niveau scolaire.

1- Comparaison des classes de même niveau

Pour comparer les classes d'un même niveau entre elles, nous avons choisi de prendre comme indicateurs le nombre d'items réussis, sous trois formes :

- le nombre d'items réussis par l'élève le plus faible de la classe (réussite minimum),
- le nombre d'items réussis par l'élève le plus fort de la classe (réussite maximum)
- le nombre d'items médians (réussite médiane).

La réussite médiane n'est pas toujours "au milieu de l'effectif". Nous avons indiqué alors le nombre d'élèves ayant réussi à un nombre d'items inférieur ou égal à la médiane.

Nous avons également situé la réussite minimum de l'ensemble de l'effectif d'un niveau scolaire donné, sa réussite maximum et sa réussite médiane. Nous avons comparé les médianes de chaque classe à la médiane d'ensemble. Nous avons repéré ainsi des classes fortes, moyennes ou faibles.

Les classes nous ont paru très contrastées au début de l'année scolaire, certains contrastes persistant en fin d'année, comme on va le voir dans les tableaux ci-après.

	Total	Réus min	Réus max	Réus médiane	Effectif ≤ m
École n° 1	***26***	***0***	***8***	***3***	***16***
École n° 2	***18***	***2***	***15***	***6***	***11***
École n° 3	26	0	9	4	13
École n° 4	16	2	13	6	8
École n° 5	24	1	16	6	13
École n° 6- Classe A	21	2	15	9	11
École n° 7- Classe A	22	3	19	11	13
École n° 7- Classe B	21	7	16	12	12
Total CM1	**174**	0	19	7	94

Réussite des élèves de CM1 au test de septembre 1994
En italique et gras, les classes de ZEP

A l'école n° 4, il s'agit d'un niveau double, CM1-CM2 : les élèves ont été ventilés sur chacun des deux niveaux. L'école n° 6 est une école d'application.

L'école n° 7 recrute exclusivement des élèves du Conservatoire de Musique de la ville, ses horaires et effectifs sont moins élevés que dans les écoles ordinaires. Les scores obtenus par les élèves de cette école sont particulièrement élevés.

Classes	Total	Réus min	Réus max	R. médiane	Effectif ≤ m
École n° 1	***23***	***3***	***19***	***9***	***12***
École n° 2	***18***	***7***	***27***	***15***	***9***
École n° 3	24	12	28	21	11
École n° 4	14	10	25	13	8
École n° 5	23	8	28	18	12
École n° 6	21	4	26	21	10
École n° 7- Classe A	22	11	28	17	12
Total CM1	**145**	3	28	17	72

Réussite des élèves de CM1 au test de juin 1995
En italique et gras, les classes de ZEP

La classe de CM1 de l'école n° 1 et les élèves de la classe à double niveau (école n° 4) ont progressé mais moins que les autres. La classe musicale (école n° 7) est devenue "moyenne".

Un phénomène analogue se produit pour les élèves de CM2.

	Total	Réus min	Réus max	R. médiane	Effectif ≤ m
École n° 8- Classe A	***20***	*7*	***17***	***11***	***10***
École n° 8- Classe B	***19***	***6***	***22***	***12***	***9***
École n° 4	11	3	17	9	6
École n° 9	24	4	23	12	13
École n° 6- Classe B	24	6	19	10	12
École n° 6- Classe C	27	6	19	10	13
École n° 7- Classe C	16	16	26	22	8
École n° 7- Classe D	16	10	26	23	9
Total CM2	**157**	3	26	12	76

Réussite des élèves de CM2 au test de septembre 1994
En italique et gras, les classes de ZEP

Les élèves de CM2 (classe à double niveau de l'école n° 3) sont d'un niveau plutôt faible, comme ceux de l'école d'application n° 6. En revanche, on voit que les résultats de l'école musicale n° 7 sont, comme pour le CM1, particulièrement élevés.

Classes	Total	Réus min	Réus max	R. médiane	Effectif ≤ m
École n° 8- Classe A	***18***	***11***	***28***	***19***	***10***
École n° 8- Classe B	***18***	***10***	***26***	***17***	***10***
École n° 4	11	14	26	18	6
École n° 9	24	9	28	22	12
École n° 10- Classe B	21	11	27	18	11
École n° 7- Classe C	15	20	28	24	7
École n° 7- Classe D	16	22	29	27	8
Total CM2	**123**	9	29	22	64

Réussite des élèves de CM2 au test de juin 1995
En italique et gras, les classes de ZEP

Les élèves de CM2 des classes de ZEP sont en fin d'année un peu plus faibles que les autres, mais sont de niveau comparable à ceux d'autres classes non situées en ZEP. Les deux classes musicales (école n° 7) confirment leurs scores élevés, tout particulièrement la classe D.

Examinons maintenant les scores des élèves de collège.

	Total	Réus min	Réus max	R. médiane	Effectif ≤ m
Collège n° 1- Classe A	23	6	26	14	13
Collège n° 1- Classe B	28	7	26	15	15
Collège n° 2- Classe A	26	5	25	14	14
Collège n° 2- Classe B	24	2	25	14	12
Collège n° 2- Classe C	30	9	27	20	15
Collège n° 2- Classe D	25	5	23	14	12
Collège n° 2- Classe E	23	8	27	16	12
Collège n° 3- Classe A	20	7	23	16	11
Collège n° 3- Classe B	26	9	29	18	14
Total 6°	**225**	2	29	15	112

Réussite des élèves de sixième au test de septembre 1994

Au collège n° 2, la séparation entre différentes sixièmes n'est pas significative en mathématiques, car pour cette discipline l'enseignement est assuré en groupes de niveaux d'effectifs variables tout au long de l'année. Nous avons cependant conservé la division administrative par commodité de classement.

La classe A du collège n° 3 est une classe de soutien. A noter que le niveau de départ de cette classe est comparable à ceux des deux classes (ordinaires) du collège n° 1.

En juin 1995, quatre classes du collège n° 2 répondent au test, alors qu'elles ne l'avaient pas subi au début d'année scolaire (classes K, L, M et N).

Classes	Total	Réus min	Réus max	R. médiane	Effectif ≤ m
Collège n° 1- Classe A	16	8	27	18	7
Collège n° 1- Classe B	26	15	28	21	13
Collège n° 2- Classe A	24	8	27	18	13
Collège n° 2- Classe B	25	7	26	19	12
Collège n° 2- Classe C	31	18	29	23	15
Collège n° 2- Classe D	25	6	26	17	13
Collège n° 2- Classe E	24	9	29	21	13
Collège n° 2- Classe K	26	4	28	18	13
Collège n° 2- Classe L	19	3	26	17	10
Collège n° 2- Classe M	15	6	25	18	8
Collège n° 2- Classe N	21	16	27	23	9
Total 6°	**252**	3	29	20	128

Réussite des élèves de sixième au test de juin 1995

La classe de soutien du collège n°1 (classe A) a un score toujours légèrement plus faible que celui des autres classes, mais comparable à ceux d'autres classes du collège n° 2. Les quatre classes supplémentaires du collège n° 2 présentent des scores voisins de ceux des autres classes du même collège.

Examinons maintenant les résultats de classes de cinquième.

	Total	Réus min	Réus max	R. médiane	Effectif ≤ m
Collège n° 2- Classe F	25	3	25	17	12
Collège n° 2- Classe G	24	8	27	19	12
Collège n° 2- Classe H	27	9	27	17	13
Collège n° 2- Classe J	27	11	26	20	14
Collège n° 4	27	12	29	21	14
Total 5°	**130**	3	29	19	68

Réussite des élèves de cinquième au test de septembre 1994

Au collège n° 2, l'organisation pédagogique des classes de cinquième est la même que pour la sixième (groupes de niveaux). Les professeurs de ces classes enseignent également en sixième. En cinquième, leur association à l'expérimentation s'est limitée à la passation du questionnaire. A noter que les élèves du collège n° 4 sont de niveau plus élevé que leurs camarades du collège n° 2.

Classes	Total	Réus min	Réus max	R. médiane	Effectif ≤ m
Collège n° 2- Classe F	16	8	27	22	6
Collège n° 2- Classe G	20	9	27	22	10
Collège n° 2- Classe H	14	15	27	21	6
Collège n° 2- Classe J	13	10	27	22	6
Collège n° 4	26	10	29	23	12
Total 5°	**89**	8	29	22/23	38/50

Réussite des élèves de cinquième au test de juin 1995

En fin d'année, les effectifs ont fondu dans les classes de cinquième du collège n° 2. Les comparaisons avec les classes des autres niveaux sont donc moins fiables.

On voit que si le nombre d'enseignants est plus faible au collège qu'à l'école primaire, le nombre d'élèves concernés est comparable : 355 au collège et 331 à l'école primaire. Cependant, si on ne retient que les classes avec lesquelles les enseignants ont essayé des suggestions, il n'y a que 252 élèves de collège représentés, dont une seule classe de cinquième (collège n° 4).

2- Analyse du test de septembre 1994

Le test de septembre comportait 12 exercices sur les décimaux, soit un total de 29 items.

Nous avons éliminé deux items dont les réponses nous paraissaient difficiles à interpréter : ceux de l'exercice 15. Rappelons-en la formulation.

> Martine affirme que "72 x 1,9 est proche de 140". Es-tu d'accord avec Martine ou non ?
> Explique pourquoi. (item 35)
>
> Une classe de collège compte en moyenne 25 élèves. Le nombre d'élèves dans un collège de 21 classes est proche de 300 400 500.
> Entoure la réponse qui te semble la plus proche du résultat.
> Explique ton choix. (item 36)

Certains élèves, se fixant sur la valeur exacte, ont estimé que 140 ne pouvait être une bonne réponse à l'item 35. La proximité étant une notion relative et non absolue, nous considérons la question comme mal formulée, et le codage qui en résulte hasardeux.

Pour l'item 36, la question était cette fois sans ambiguïté. Mais les nombres en jeu ont incité beaucoup d'élèves à faire le calcul de tête en décomposant 21 x 25 sous la forme :

20 x 25 + 1 x 25

Ils ont alors donné le résultat exact. Là aussi, le codage a été hasardeux.

Pour l'analyse des réponses, nous avons regroupé les items par thème mathématique. Les résultats par item sont exprimés en pourcentage.

2.1 Multiplication et la division de décimaux par 10 et 100

Un premier groupe d'items concerne la multiplication et la division de décimaux par 10 et 100. [1]

Item 1 et item 48	2,3 x 10	Item 3	630 : 10
Item 2	35,2 x 100	Item 4	937,6 : 100

Classe	Item 1	Item 48	Item 2	Item 3	Item 4
CM1	5	7	2	20	1
CM2	52	53	38	73	38
6 °	**77**	**64**	**51**	**78**	**35**
5 °	89	82	62	87	52
National, 6°	**77**	**75**	**60**	**81**	**54**

Il est normal que les élèves de CM1 soient perdus devant des calculs à faire sur des décimaux. Si l'approche de la division des entiers est faite au CE2, il n'est pas sûr que tous les élèves connaissent la notation associée. C'est peut-être ce qui explique le faible score des élèves de CM1 à l'item 3.

Les résultats de nos classes de sixième semblent plus faibles que celles de l'échantillon national.

Bien que la population d'élèves soit disparate d'un niveau scolaire à une autre, on observe des scores de plus en plus élevés pour chacun des items, du CM2 à la cinquième.

2.2 Calculs de sommes, différences, quotients

Le groupe d'items suivant correspond à des calculs de somme, différences, quotients, donnés en ligne. Nous avons rapproché de la comparaison de décimaux. [2]

Item 39	8,73 - 5	Item 49	4 584 : 8
Item 40	18,5 + 3,67	Item 58 :	Ranger des décimaux du plus petit au plus grand :
Item 41	6,48 - 4,6		7,25 7,8 6,148 7,09

[1] Voir p. 270 et 272.
[2] Voir p. 272, 274 et 275.

Classe	Item 39	Item 40	Item 41	Item 49	Item 58
CM1	25	3	0	3	2
CM2	62	45	48	41	36
6 °	**62**	**60**	**56**	**61**	**43**
5 °	77	71	57	55	68
National, 6°	**67**	**63**	**58**	**64**	**58**

Là encore, les scores du CM1 s'expliquent par le fait que l'enseignement des décimaux n'a pas commencé. Pourtant, ils ont su calculer 8,73 - 5 : par référence à la monnaie ?

Sur ce groupe d'items, les scores de nos classes de sixième sont comparables à ceux de l'évaluation nationale.

Remarquons des scores plus élevés pour nos élèves de cinquième, en particulier dans le rangement des nombres décimaux (item 58). Cependant, le calcul de la différence 6,48 - 4,6 (item 41) et celui du quotient 4 584 : 8 (item 49) restent aussi difficiles que pour nos élèves de sixième. Visiblement les techniques de calcul à la main ne sont pas stabilisées pour la population avec laquelle nous allions travailler.

D'autres calculs étaient à faire *sous forme "posée"* sur entiers ou décimaux. Nous les donnons ici en ligne. [3]

Item 37	694 + 496	Item 38	453 - 246	Item 42	75 - 8,37
Item 46	6 493 + 604 + 39 + 143	Item 47	204 x 20	Item 57	63,4 x 2,12

Classe	Item 37	Item 46	Item 38	Item 47	Item 42	Item 57
CM1	80	80	68	56	0	1
CM2	95	91	82	80	49	11
6 °	**92**	**90**	**81**	**80**	**56**	**48**
5 °	98	95	82	84	55	52
National, 6°	**93**	**91**	**82**	**85**	**60**	**50**

Le calcul additif, soustractif et multiplicatif sur les entiers est maîtrisé : remarquons qu'il correspond à des apprentissages du CE2. Les scores sont très proches de ceux de l'évaluation nationale.

Le faible score de l'item 57 (produit de décimaux) chez les élèves de CM1 peut s'expliquer par la progression habituelle à l'école primaire : l'addition de décimaux, la soustraction de décimaux, la multiplication d'un décimal par un entier sont traités au CM1, tandis que la multiplication d'un décimal par un décimal est traitée en général au CM2 [4].

En sixième et cinquième, les calculs sur les décimaux présentent encore des embûches pour une forte minorité d'élèves, même lorsque l'opération est disposée sur la feuille de papier. Les scores de nos élèves de sixième et de cinquième sont pratiquement identiques.

3 Voir p. 272, 274 et 275.

4 Les nouveaux programmes de l'école primaire (1995) prévoient de reporter la multiplication de décimaux au collège à partir de la rentrée 1998.

2.3 Usage d'une graduation

Un autre groupe d'items concerne l'usage de la règle graduée pour construire un segment de longueur 6,5 cm dont une extrémité était donnée (item 16) et l'interprétation d'une graduation semi-muette en dixièmes, orientée verticalement vers le haut. Pour cette dernière les nombres suivants étaient placés : 0 ; 1 ; 2 ; 0,4. Les nombres à déterminer étaient l'un supérieur à 1 (item 29) et l'autre compris entre 0 et 1 (item 30).[5]

Pour répondre correctement à l'item 16, il fallait non seulement bien utiliser sa règle graduée mais aussi bien placer le segment tracé sur la feuille et en nommer l'extrémité. Cet item concerne donc aussi l'enseignement des conventions géométriques : il est normal de voir les scores progresser de CM1 à la classe de cinquième.

Classe	Item 16	Item 29	Item 30
CM1	44	43	60
CM2	54	65	75
6 °	**69**	**55**	**66**
5 °	88	82	87
National, 6°	**74**	**64**	**75**

Nos élèves de CM2, en début d'année, semblent avoir une aisance convenable en matière de lecture d'une graduation semi-muette, en tous cas supérieure à celle de notre population de sixième. Cette lecture est maîtrisée en début de cinquième. Remarquons que notre population de sixième est plus faible sur ce groupe d'items que la moyenne nationale.

2.4 Proportionnalité

Un autre groupe d'items porte sur la proportionnalité entre kilogrammes de peinture et mètres carrés (items 19, 20 et 21). Les données fournies étaient 6 kg pour 15 m^2, 10 kg pour 25 m^2. On demandait successivement le nombre de mètres carrés pour 16 kg de peinture, le nombre de kg de peinture pour 50 m^2 et le nombre de mètres carrés pour 4 kg de peinture.[6]

Classe	Item 19	Item 20	Item 21
CM1	38	21	18
CM2	38	32	21
6 °	**57**	**45**	**34**
5 °	62	52	39
National, 6°	**64**	**48**	**37**

Il est intéressant de voir que certains élèves de CM1 disposent d'un modèle déjà opératoire pour résoudre le problème. Les scores de nos élèves de sixième sont très proches de ceux de l'échantillon national. Nos élèves de cinquième ont également des performances très proches des résultats nationaux de sixième.

[5] Voir p. 271.

[6] Voir p. 271.

2.5 Sens des opérations sur les décimaux

Le dernier groupe d'items concerne les sens que l'on peut associer aux décimaux.

Les trois items qui achevaient le questionnaire portaient sur le sens de la multiplication de longueurs par un entier (item 74), l'additivité des longueurs (item 75) et la différence entre deux longueurs (item 76), avec des représentations de segments.

Les items 12 et 13 correspondent à la recherche du nombre (item 12) de morceaux de ficelle de 4 mètres de long que l'on peut couper dans une ficelle de 39,2 mètres et au calcul du reste de ficelle (item 13). [7]

Classe	Item 74	Item 75	Item 76	Item 12	Item 13
CM1	49	50	22	16	14
CM2	46	47	23	31	24
6 °	**71**	**70**	**35**	**35**	**25**
5 °	74	75	56	42	28
National, 6°	**76**	**77**	**47**	**43**	**27**

Remarquons tout d'abord à tous les niveaux la chute de score de l'item 76 par rapport aux items 74 et 75 : le sens de l'écart semble beaucoup plus difficile à maîtriser que celui de l'additivité des longueurs. Nos élèves de cinquième commencent à maîtriser l'exercice.

Nos classes de sixième sont comparables à celles de l'échantillon national.

Le problème des ficelles manifeste le peu de vigilance des élèves sur l'ordre de grandeur du résultat : en effet, un simple calcul mental montre que 4 fois 9 est proche de la longueur totale. Il faut cependant noter que la situation de division présentée n'est pas classique : en général on divise une longueur totale en un nombre de parts fixé (entier) et on demande la longueur d'une part (éventuellement décimale), alors qu'ici c'est le nombre de parts qui est inconnu. De plus, la "division posée" fournissait un quotient décimal exact, ce qui a pu être pris pour un indice de vérité (contrat didactique dominant). Les résultats sont d'ailleurs étonnamment semblables du CM2 à la cinquième.

Retenons de cette étude deux points forts :

- notre population de sixième a, en début d'année, des scores souvent inférieurs à ceux de la moyenne nationale, ce qui peut avoir des répercussions sur ce que leurs enseignants déclarent faisables à ce niveau,
- les difficultés de début d'année restent pour une forte minorité dans le calcul numérique mettant en jeu des décimaux, elles restent élevées sur la proportionnalité et le sens des opérations dans le contexte des décimaux.

3- A la fin de l'année 1994-95

Nous avons voulu faire passer le même test à la fin de l'année. Notre intention était de mesurer l'évolution des élèves, de voir si les mêmes points forts se dégageaient.

Le questionnaire a repris la quasi totalité des exercices à l'exception de 4 exercices que nous avons modifiés pour avoir des résultats plus précis.

[7] Voir p. 270 et 276.

Dans l'exercice 7, nous avons demandé de construire un segment de longueur 4,8 cm. En effet, nous voulions vérifier que des nombres décimaux moins familiers que des "nombres et demi" étaient bien lus.

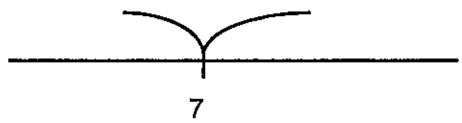
Nous avons légèrement changé les nombres décimaux à ranger (exercice 25), en prenant un nombre dont la partie entière était beaucoup plus élevée.

Nous avons modifié l'exercice 15, estimant que les réponses étaient difficiles à interpréter. Nous l'avons remplacé par un exercice de comparaison d'écart. Par rapport à 60, situer le nombre le plus proche : 60,3 ou 59,3 (item 35). Par rapport à 7, situer le nombre le plus proche : 6,9 ou 7,08 (item 36).

Par rapport à **7**, quel est le nombre le plus proche :

6,9 ou 7,08 ?

Réponse : ....



Nous avons remplacé l'exercice 24 (calcul de multiplication à la main) par un contrôle par calcul mental d'un résultat de multiplication. Nous pensons en effet extrêmement important de proposer des situations pertinentes d'usage du calcul mental.

On a calculé 63,5 x 2,12.
Le résultat est un des nombres suivants. Trouve-le, sans poser l'opération.
134,620 13,462 1346,200 134,62

L'ordre des questions a été légèrement modifié, pour des questions de mise en page. Toutefois les premiers exercices ont été les mêmes ainsi que le dernier.

Le questionnaire a été remis aux différents enseignants dans le courant du mois de mai et début de juin. Les enseignants devaient le soumettre aux élèves entre le 6 et le 24 juin 1995. En fait, plusieurs classes n'ont pu faire le test, pour des raisons diverses : excursions de fin d'année, modifications de dernière minute de l'emploi du temps (école n° 7, collège n° 3). Par ailleurs, une classe d'école primaire a traité le questionnaire comme une évaluation classique avec énoncé mis au tableau : nous n'avons pas tenu compte de ses réponses, car les corrections faites au "stylo vert" [8] n'étaient pas toutes interprétables. Enfin des élèves avaient commencé à partir en vacances avant la date officielle (collège n° 2). En revanche, des enseignants du collège n° 2 ont proposé le questionnaire à des classes de sixième qui n'avaient pas été associées à l'expérimentation : nous les avons incluses dans le dépouillement. La population de fin d'année est donc pas exactement la même que celle de début d'année.

Les questionnaires ont été soumis aux élèves sous la responsabilité de leur enseignant, en notre absence. Nous avons assuré nous-même le dépouillement et la saisie des données correspondantes. La saisie a été faite de sorte que chaque enseignant dispose côte à côte des résultats individuels aux deux questionnaires, de septembre 1994 et de juin 1995.

[8] Les enseignants d'école primaire demandent, en général, aux élèves d'inscrire sur leur copie les corrections indiquées collectivement. Ils contrôlent ensuite et la réponse initiale des élèves et la pertinence de la correction.

Nous reprenons le même type d'analyse par groupe d'items. Bien que les résultats de l'enquête nationale concernent le début d'année, nous les avons conservés dans les tableaux pour mémoire.

3. 1 Multiplication et la division de décimaux par 10 et 100

Un premier groupe d'items concerne la multiplication et la division de décimaux par 10 et 100. Nous allons comparer les résultats de fin d'année à ceux de début d'année. [9]

Item 1 et item 48	2,3 x 10	Item 3	630 : 10
Item 2	35,2 x 100	Item 4	937,6 : 100

Classe	Item 1	Item 48	Item 2	Item 3	Item 4
CM1	5	7	2	20	1
CM2	52	53	38	73	38
6 °	**77**	**64**	**51**	**78**	**35**
5 °	89	82	62	87	52
National, 6°	**77**	**75**	**60**	**81**	**54**

Résultats de septembre 1994

Classe	Item 1	Item 48	Item 2	Item 3	Item 4
CM1	66	66	48	81	50
CM2	86	83	72	86	72
6 °	**85**	**75**	**62**	**88**	**60**
5 °	89	92	62	91	66

Résultats de juin 1995

Les élèves de tous les niveaux scolaires ont progressé, mais cette maîtrise n'est pas complète : l'item 2 et l'item 4 font encore trébucher une forte minorité en sixième et en cinquième. En revanche, les élèves des classes de CM2 semblent presque à l'aise en cette fin d'année.

3.2 Calculs de sommes, différences, quotients

Le groupe d'items suivant correspond à des calculs de somme, différences, quotients, donnés en ligne. Nous avons rapproché de la comparaison de décimaux (item 58) et de l'exercice nouveau sur l'estimation d'un produit (item 57).[10]

Item 39	8,73 - 5	Item 49 4 584 : 8
Item 40	18,5 + 3,67	Item 57 : Estimer le produit 63,5 x 2,12 *(nouvel exercice)*
Item 41	6,48 - 4,6	Item 58 : Ranger des décimaux du plus petit au plus grand
		7,25 7,8 76,148 7,09

[9] Voir p. 277 et 279.

[10] Voir p. 280 et 281.

Classe	Item 39	Item 40	Item 41	Item 49	Item 58
CM1	25	3	0	3	2
CM2	62	45	48	41	36
6 °	**62**	**60**	**56**	**61**	**43**
5 °	77	71	57	55	68
National, 6°	**67**	**63**	**58**	**64**	**58**

Résultats de septembre 1994

Classe	Item 39	Item 40	Item 41	Item 49	Item 57	Item 58
CM1	52	50	45	46	74	33
CM2	74	76	74	73	86	65
6 °	**68**	**66**	**55**	**60**	**74**	**64**
5 °	79	75	58	65	74	75

Résultats de juin 1995

En fin d'année, les scores du CM1 montrent que l'enseignement des décimaux vient de démarrer. Les scores du CM2 sont supérieurs à ceux du CM1, avec un décalage à peu près constant, sauf pour le calcul d'estimation assez bien réussi au CM1 (item 57).

En fin d'année, les scores des élèves de la classe de sixième sont plus faibles que ceux des CM2, sauf pour le rangement des décimaux (item 58). Quant à la cinquième, bien que la précision des pourcentages soit trop élevée (effectif inférieur à 100), le calcul numérique banal semble quasi stagnant (items 41 et 49).

L'estimation du produit de deux nombres décimaux est assez bien réussie, et ce dans toutes les classes, avec un maximum pour les CM2.

D'autres calculs étaient à faire *sous forme "posée"* sur entiers ou décimaux. Nous les donnons ici en ligne.[11]

Item 37	694 + 496	Item 38	453 - 246	Item 42	75 - 8,37
Item 46	6 493 + 604 + 39 + 143	Item 47	204 x 20		

Classe	Item 37	Item 46	Item 38	Item 47	Item 42
CM1	80	80	68	56	0
CM2	95	91	82	80	49
6 °	**92**	**90**	**81**	**80**	**56**
5 °	98	95	82	84	55
National, 6°	**93**	**91**	**82**	**85**	**60**

Résultats de septembre 1994

11 Voir p. 279 et 280.

Classe	Item 37	Item 46	Item 38	Item 47	Item 42
CM1	92	92	83	83	41
CM2	99	91	92	89	66
6 °	**96**	**91**	**85**	**83**	**47**
5 °	94	97	90	88	58

Résultats de juin 1995

La maîtrise est confirmée en ce qui concerne le calcul additif, soustractif et multiplicatif sur les entiers. Les apprentissages semblent donc stabilisés.

En revanche, les calculs sur les décimaux, même lorsque l'opération est disposée sur la feuille de papier, présentent encore des embûches pour une forte minorité d'élèves de sixième et cinquième (items 42 et 57). Sur ces items, les seuls élèves de CM2 ont progressé.

3.3 Usage d'une graduation

Un autre groupe d'items concerne l'usage de la règle graduée pour construire un segment de longueur 4,8 cm dont une extrémité était donnée (item 16, nouvel exercice) et l'interprétation d'une graduation semi-muette en dixièmes. Pour cette dernière les nombres suivants étaient placés : 0 ; 1 ; 2 ; 0,4. Les nombres à déterminer étaient l'un compris entre 1 et 2 (item 29) et l'autre compris entre 0 et 1 (item 30).[12]

Classe	Item 16	Item 29	Item 30
CM1	44	43	60
CM2	54	65	75
6 °	**69**	**55**	**66**
5 °	88	82	87
National, 6°	**74**	**64**	**75**

Résultats de septembre 1994

Classe	Item 16	Item 29	Item 30
CM1	74	70	81
CM2	89	83	87
6 °	**84**	**81**	**92**
5 °	90	88	97

Résultats de juin 1995

Les classes de CM1, CM2 et sixième ont énormément progressé sur ces 3 items. On peut considérer que les élèves en fin d'année maîtrisent l'usage de la règle graduée dans un contexte géométrique. Il est curieux de constater que la lecture de la graduation semi-muette, bien réussie à tous les niveaux, fait trébucher plus d'élèves pour les nombres supérieurs à 1 (item 29) que pour les nombres compris entre 0 et 1 (item 30) : il est vrai que pour ce dernier item l'indication 0,4 fournissait un indice supplémentaire.

3.4 Proportionnalité

Un autre groupe d'items porte sur la proportionnalité entre kilogrammes de peinture et mètres carrés (items 19, 20 et 21). Les données fournies étaient 6 kg pour 15 m^2, 10 kg pour 25 m^2. On demandait successivement le nombre de mètres carrés pour 16 kilogrammes de peinture, le nombre de kilogrammes de peinture pour 50 mètres carrés et le nombre de mètres carrés pour 4 kilogrammes de peinture.[13]

[12] Voir p. 278 et 279.

[13] Voir p. 278.

Classe	Item 19	Item 20	Item 21
CM1	38	21	18
CM2	38	32	21
6 °	**57**	**45**	**34**
5 °	62	52	39
National, 6°	**64**	**48**	**37**

Résultats de septembre 1994

Classe	Item 19	Item 20	Item 21
CM1	61	45	38
CM2	69	63	43
6 °	**72**	**61**	**47**
5 °	87	70	65

Résultats de juin 1995

La progression de l'ensemble des classes est sensible. Toutefois l'apprentissage n'est pas encore stabilisé en cinquième. Il est curieux de noter que l'item 21 est toujours moins bien réussi que les autres. Il fallait calculer un écart (entre 6 et 10 kg) et lui faire correspondre l'écart entre 15 m^2 et 25 m^2 : l'écart entre grandeurs est-il plus difficile à maîtriser que l'additivité des grandeurs (item 19) ?

3.5 Sens des opérations sur les décimaux

Un autre groupe d'items concerne les sens que l'on peut associer aux décimaux.

Les trois items qui achevaient le questionnaire portaient sur le sens de la multiplication de longueurs par un entier (item 74), l'additivité des longueurs (item 75) et la différence entre deux longueurs (item 76), avec des représentations de segments. [14]

Les items 12 et 13 correspondent à la recherche du nombre (item 12) de morceaux de ficelle de 4 mètres de long que l'on peut couper dans une ficelle de 39,2 mètres et au calcul du reste de ficelle (item 13).

Classe	Item 74	Item 75	Item 76	Item 12	Item 13
CM1	49	50	22	16	14
CM2	46	47	23	31	24
6 °	**71**	**70**	**35**	**35**	**25**
5 °	74	75	56	42	28
National, 6°	**76**	**77**	**47**	**43**	**27**

Résultats de septembre 1994

Classe	Item 74	Item 75	Item 76	Item 12	Item 13
CM1	71	74	50	33	33
CM2	87	85	53	38	39
6 °	**73**	**79**	**47**	**44**	**33**
5 °	85	87	72	61	45

Résultats de juin 1995

14 Voir p. 277 et 282.

Remarquons tout d'abord la permanence de la chute de score de l'item 76, moindre pour les élèves de cinquième : le sens de l'écart entre longueurs reste plus difficile à maîtriser que celui de l'additivité des longueurs. Remarquons les scores obtenus par les élèves de CM1, comparables à ceux de sixième, et ceux de leurs camarades de CM2 comparables à ceux de cinquième.

Les scores progressent beaucoup moins sur le problème des ficelles (items 12 et 13) : la maîtrise du sens des opérations et le contrôle de l'interprétation des résultats semblent s'affirmer seulement en cinquième.

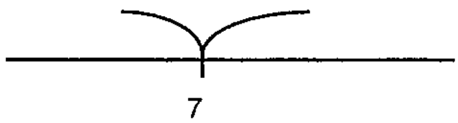
3.6 Comparaison d'écarts

Nous avions proposé en fin d'année un exercice nouveau. Par rapport à 60, situer le nombre le plus proche : 60,3 ou 59,3 (item 35). Par rapport à 7, situer le nombre le plus proche : 6,9 ou 7,08 (item 36).

Par rapport à **7**, quel est le nombre le plus proche :

6,9 ou 7,08 ?

Réponse : ....



Répondre à de telles questions suppose de savoir relier la soustraction à la mesure d'écarts sur la demi-droite numérique et faire un calcul mental correct. Pour l'item 36, les élèves devaient surmonter plusieurs difficultés : utiliser des nombres décimaux qui n'avaient pas le même nombre de chiffres après la virgule, faire un calcul mental en "enchaînant" les étapes et enfin maîtriser la signification des chiffres de la partie décimale :

7,08 - 7 = 0,08 7 - 6,9 = 0,1

0,08 est plus petit que 0,1

donc 7,08 est plus proche de 7 que de 6,9

L'item 35 est mieux réussi que l'item 36, qui est mal réussi à tous les niveaux.

Classe	Item 35	Item 36
CM1	66	22
CM2	80	30
6 °	**74**	**27**
5 °	81	29

Résultats de juin 1995

L'item 36 semble montrer un déficit important à la fois sur la numération décimale et sur la liaison entre ordre, addition et soustraction dans le champ des décimaux. Or cette liaison correspond au double statut des nombres sur la droite numérique : distance à l'origine et position. Beaucoup d'enseignants comptent sur la disponibilité chez leurs élèves de ce double statut.

Ces items sont à rapprocher de l'item 76 (interprétation d'un écart entre deux longueurs), de l'item 39 (calcul de 8,73 - 5), de l'item 42 (calcul de 75 - 8,37 sous forme posée) et de l'item 58 (rangement de nombres décimaux).[15]

[15] Voir p. 280, 281 et 282.

Classe	Item 76	Item 39	Item 42	Item 58
CM1	22	25	0	2
CM2	23	62	49	36
6 °	**35**	**62**	**56**	**43**
5 °	56	77	55	68
National, 6°	**47**	**67**	**60**	**58**

Résultats de septembre 1994

Classe	Item 76	Item 39	Item 42	Item 58	Item 35	Item 36
CM1	50	52	41	33	66	22
CM2	53	74	66	65	80	30
6 °	**47**	**68**	**47**	**64**	**74**	**27**
5 °	72	79	58	75	81	29

Résultats de juin 1995

4- En conclusion

L'analyse de l'ensemble des réponses aux 29 items, au début et en fin d'année, révèle une grande hétérogénéité des classes. Plusieurs faits méritent d'être soulignés.

En début d'année,

- notre population de sixième a des scores plus faibles que ceux de la population nationale [16],
- une forte minorité d'élèves de tous niveaux de classe a des difficultés dans le calcul numérique portant sur des décimaux et dans les exercices qui mettent en jeu la proportionnalité et le sens des opérations.

En fin d'année :

- notre population de CM1 atteint souvent des scores proches de ceux de sixième, notre population de CM2 atteint souvent des scores proches de ceux de cinquième,
- le calcul numérique sur les entiers est bien maîtrisé à tous les niveaux sauf pour la technique de division dont la maîtrise semble s'émousser en cinquième [17],
- les calculs sur les décimaux (addition, soustraction, multiplication) sont en cours de stabilisation, mais la maîtrise est encore fragile chez les élèves de cinquième,
- la proportionnalité est en cours de stabilisation,
- deux déficits restent importants : le contrôle du sens de la division euclidienne dans un contexte de longueurs, la comparaison d'écarts entre nombres décimaux.

[16] Elle est située majoritairement en Seine-St-Denis : les performances scolaires de l'est parisien seraient-elles plus faibles que la moyenne nationale ?

[17] Rappelons que la population de cinquième de fin d'année n'est pas celle de début d'année.

Jeanne BOLON
IUFM, centre de Versailles

Mai 1995

ENSEIGNEMENT DES DÉCIMAUX
QUESTIONNAIRE DE FIN D'EXPÉRIMENTATION

Vous avez bien voulu collaborer à une expérimentation sur l'enseignement des décimaux durant l'année 1994-95. Vous y avez déjà consacré un temps précieux !

Pour des raisons propres au travail de thèse, je suis obligée de vous demander, encore une fois, de l'aide : pourriez-vous répondre au questionnaire ci-après ?

Il va de soi que dans la publication finale les informations seront anonymes : les indications personnelles qui vous sont demandées seront utilisées pour faire des vérifications.

1- Vous avez reçu 12 feuilles de "suggestions". Nous allons les passer en revue.
Pourriez-vous indiquer **celles que vous avez utilisées, au moins en partie** ?

Suggestion 1 : Le calcul approché sur les entiers et les décimaux	❐
Suggestion 2 : Les grandeurs familières, interprétation des résultats affichés à la calculatrice	❐
Suggestion 3 : Les grandeurs et unités de référence, fractionnement de l'unité, graduation	❐
Suggestion 4 : Liaison entre ordre et addition	❐
Suggestion 5 : Liaison entre fraction et division euclidienne	❐
Suggestion 6 : Problèmes additifs/soustractifs	❐
Suggestion 7 : Problèmes multiplicatifs/"divisifs"	❐
Suggestion 8 : Les grandeurs et unités de référence, l'algèbre sous-jacente	❐
Suggestion 9 : Grandeurs et unités conventionnelles	❐
Suggestion 10 : Agrandissement d'un puzzle	❐
Suggestion 11 : Calculer, fabriquer, mesurer	❐
Suggestion 12 : Fonction numérique et valeur approchée	❐

(Après passage en revue)
2- Quelles feuilles **vous ont posé le plus de problèmes** ?

3- Parmi ces 12 feuilles de "suggestions", j'aimerais connaître celles qui vous paraissent **hors sujet** pour une classe ordinaire du niveau où vous avez travaillé, ou celles qui vous paraissent **convenir, au moins partiellement, à un autre niveau** que celui ou ceux où vous avez travaillé.

(Faire commenter)

	Hors sujet	Niveau conseillé
Suggestion 1 : Le calcul approché sur les entiers et les décimaux	.....	.....
Suggestion 2 : Les grandeurs familières, interprétation des résultats affichés à la calculatrice	.....	.....
Suggestion 3 : Les grandeurs et unités de référence, fractionnement de l'unité, graduation	.....	.....
Suggestion 4 : Liaison entre ordre et addition	.....	.....
Suggestion 5 : Liaison entre fraction et division euclidienne	.....	.....
Suggestion 6 : Problèmes additifs/soustractifs	.....	.....
Suggestion 7 : Problèmes multiplicatifs/"divisifs"	.....	.....
Suggestion 8 : Les grandeurs et unités de référence, l'algèbre sous-jacente	.....	.....
Suggestion 9 : Grandeurs et unités conventionnelles	.....	.....
Suggestion 10 : Agrandissement d'un puzzle	.....	.....
Suggestion 11 : Calculer, fabriquer, mesurer	.....	.....
Suggestion 12 : Fonction numérique et valeur approchée	.....	.....

(Sans revenir aux feuilles, qui ont déjà été manipulées deux fois)
4- Parmi ces 12 feuilles de "suggestions", quelles sont celles qui vous seriez prêt(e) **à utiliser l'an prochain dans une classe de même niveau** que celui où vous exercez cette année ?

(En cas de travail sur deux niveaux, ne pas oublier de les mentionner)

5- Et alors, au total, **que pensez-vous de ce que nous avons fait cette année** ?

6- **Combien d'élèves** y a-t-il dans votre classe (ou chacune de vos classes ou chacun de vos niveaux) concernée(s) par l'expérimentation sur les décimaux ?

Classe ou niveau :
Nombre d'élèves :

Classe ou niveau :
Nombre d'élèves :

7- Votre **établissement** est-il un établissement "sensible" ? oui non

Est-il situé dans une zone d'éducation prioritaire (ZEP) ? oui non

8- Quelle est votre **catégorie** :
instituteur professeur d'école

MA PEGC AE certifié agrégé

9- Quelle votre **ancienneté** (en comptant l'année 1994-95 comme complète ainsi que les années à temps partiel) :
- dans la fonction ?

- sur le poste actuel ?

- sur le niveau CM1 ? le niveau sixième ?
- sur le niveau CM2 ? le niveau cinquième ?

9- Votre **nom** :

ENTRETIEN AVEC UN ENSEIGNANT D'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Formateur homme, 12 ans d'ancienneté, école n°8, CM2 niveau moyen, 29/6/1995

JB- Tu te souviens de celles que tu as faites ? Il me semble que tu as fait la 1, la 2, et la 3.
- J'ai fait beaucoup de 1, beaucoup de calcul mental. La 2, je t'ai envoyé les travaux. La 3, je n'ai pratiquement rien fait.
JB- Et puis, il me semble que tu avais fait aussi autre chose... Ah oui : invention de problèmes.
- Problèmes additifs et soustractifs...
JB- Problèmes multiplicatifs ?
- Oui, les problèmes multiplicatifs, mais pas "divisifs". Grandeurs et unités conventionnelles, j'ai beaucoup travaillé dessus, effectivement. Agrandissement d'un puzzle, j'ai fait quelque chose qui ressemble un petit peu à ça. je vais te montrer, voilà.
JB- Effectivement, tu as pris comme consigne : ça ressemble.. Je suppose qu'ils ont eu envie d'utiliser les procédés additifs, multiplicatifs... Ils ont bien fait comme...
- Ils ont bien fait les erreurs qu'il fallait (rires). C'était parfait.
JB- Tu as fait la 10. Je suppose que la 11, tu n'as pas fait, c'est comme la 10, mais avec des gestions d'arrondis.
- Non, je n'ai pas fait.
JB- Et la 12 ? Ce sont des fonctions numériques.
- Ça, fonctions numériques, je n'ai pas abordé du tout.
JB- Du point de vue de la lisibilité, qu'est-ce que tu as comme commentaires à faire ?
- Des problèmes que tu as proposés ?
JB- Oui, la présentation...
- Disons que.. ce que j'ai à faire comme commentaires, c'est qu'on est obligé de re... refaire les problèmes que tu proposes, de les réécrire, soit de faire des montages, soit de les réécrire, etc. Ça, c'est une réalité. Tu fais un inventaire de problèmes, on ne peut pas photocopier ça et puis donner aux enfants. Tu es bien d'accord ?
JB- Oui, ça suppose de ta part du travail.
- J'ai retravaillé. Mais quand on présente une situation aux élèves, on est obligé de la travailler. Ça n'a pas engendré pour moi un surcroît de travail, ça a été un travail
JB- Tu n'as pas a priori de difficultés de lecture, mais ce n'est pas directement consommable.
- Ce n'est pas directement..., et même, je pense aux problèmes, par exemple..., j'ai souvent reformulé les problèmes à ma façon, sachant qu'il y a des enfants qui ont des problèmes de lecture, donc... pour essayer de faciliter leur lecture...
JB- Comme tu dis, ce n'était pas un travail... insurmontable.
- Non ! Ça fait partie du travail normal d'un instit.
JB- Parce qu'il y a des gens qui m'ont dit... en sixième surtout, que c'était ... qu'ils ne savaient pas où le mettre, que ça manquait d'indications... que les objectifs...
- Quand on fait les décimaux, on sait où ça s'inclut dans la progression, moi ça ne m'a pas posé de problème. Il y a des choses que je n'ai absolument pas abordées ou pratiquement pas abordées. Il y a des éléments de fraction, pour moi, que je n'ai pas abordés parce que... Moi, je ne l'ai pas abordé parce que j'étais en stage, et ce trou du stage, où bon, après le stage, je n'avais plus que 4 semaines, il avait fait très peu de choses sur la proportionnalité, il a bien fallu que j'attaque la proportionnalité, je ne pouvais pas me permettre d'aller revérifier ce qu'il avait fait. J'ai considéré que c'était fait, c'est tout. Effectivement, dans la proportionnalité, j'ai introduit parfois les deux tiers, j'ai eu des trois demis. J'ai introduit... mais tu ne le verras pas là-dedans [les cahiers d'élèves], il y a eu toute une période où on a eu une banque de problèmes, c'était en libre-service, on a fait ça 3 ou 4 fois, des ateliers "banque de problèmes". On prenait un problème, on le résolvait, on allait présenter la résolution aux autres, et puis on choisissait : alors il y a eu des problèmes d'échelle, des problèmes de proportionnalité toute simple, des agrandissements, des choses comme ça, et c'était du travail "cahier d'essai et affiche", et puis... quand il n'y avait pas d'affiche, c'était des enfants qui allaient au tableau et qui allaient écrire et présenter leur

résolution. Donc, cette situation "banque de problèmes", il y en avait partout, tous les enfants étaient en atelier de recherche, et puis ils cherchaient sur leur cahier d'essai, il fallait qu'ils présentent.. et j'ai beaucoup travaillé ça jusqu'à la fin de l'année, donc effectivement c'est là où j'ai eu des fractions pour la proportionnalité (silence).
JB- Maintenant, on va les reprendre toutes, et puis tu vas me dire : oui c'est bien, CM1, CM2, non vraiment, ce n'est pas pour l'école primaire, tu vois...
- D'accord. La 1, calcul mental, tu me connais, pour moi c'est indispensable, CM1, CM2, sixième, cinquième, avant, après. Les grandeurs familières... et l'interprétation. Là, il y a deux éléments, il y a "trouver un ordre de grandeur" qui est indirect, mais qui est pour moi quelque chose d'indispensable et puis ensuite effectivement, associer une unité à un nombre et savoir changer d'unité, ça, c'est le plongeon direct, à chaque fois si tu mélanges des centimètres et des mètres, ils n'hésitent pas à additionner des centimètres et des mètres, plutôt CM2, même si en CM1 c'est à faire, peut-être plus sur les unités de longueur en CM1. Fractions, fractions d'unité, oui, mais c'est difficile. Quand on parle de la fraction décimale, ça marche. Quand on prend une unité et qu'on la plie et qu'on la replie, on obtient un demi, on la replie..., une fille disait : on la plie comme le linge quand on repasse (rires)!
JB- Oui, en trois...
- Ça oui, c'est à faire, je pense que c'est quelque chose envisagé à l'école élémentaire. Et c'est au collège.
JB- Ça peut démarrer à l'école...
- Oui, le démarrage se fait à l'école élémentaire, mais... enfin, pour ici en ZEP, l'approfondissement et le gros de l'étude se font plutôt au collège. Liaison entre ordre et addition, évidemment c'est à faire... mais on peut faire. Ici, ce que tu présentais, c'est addition, ordre et fraction.
JB- Oui, c'est ça.
- En fraction, addition de fractions, non. C'est au collège. C'est un "non" catégorique, je n'envisage pas l'addition de fractions. (silence)
JB- Et sur la liaison entre fraction et division euclidienne ?
- Pour moi, la division euclidienne, elle entre immédiatement, dès qu'on étudie la division, c'est la division euclidienne. C'est à dire on a une division à faire, on doit la présenter quand on a fini... pour moi la division telle que je la présente aux élèves, c'est 3 étapes. La première étape, l'ordre de grandeur ; la deuxième étape, la division ; la troisième étape, on répond à notre question, donc on donne la division euclidienne. le "pq + r", je le demande systématiquement. Il doit être encore affiché par derrière [le tableau]. Oui, tu vois.
JB- Mais là, tu as la liaison avec la fraction 17938 sur 76.
- Cette liaison avec la fraction, on ne l'a pas beaucoup faite. On l'a rencontrée sur des fractions décimales et sur la proportionnalité.
JB- Donc tu la mettrais... ? un travail systématique ?
- La division euclidienne, oui. Je la fais systématiquement, mais l'association avec une fraction : non.
JB- Donc tu le verrais plutôt reporté plus tard ... ?
- Oui, plutôt au collège. "Problèmes additifs et soustractifs", on a dit indispensable. Fabriquer des énoncés, aussi. "Multiplicatifs et divisifs", aussi. Si je n'ai pas fait fabriquer aux élèves des problèmes "divisifs", c'est parce que je n'ai pas eu le temps matériel.
JB- Tu disais aussi tout à l'heure, tu as eu le stage... La 8, c'est un travail systématique autour de la mesure, des étalons, que j'ai appelés ici unités de référence et puis les nombres.
- Je n'ai pas du tout regardé. Je n'ai pas regardé ce que j'aurais pu en faire.
JB- Pour t'expliquer, en gros, si tu veux, quand tu as un objet, par exemple, cet objet-là, ici, dans le premier exercice, je dis que c'est 3/7 : est-ce qu'on est capable de refabriquer l'unité qui a permis de dire que ça c'est 3/7 ? C'est tous les rapports entre les objets, les nombres,
- Je n'ai pas du tout envisagé ça. Maintenant pff...
JB- Tu le vois... ça peut être fait à l'école élémentaire ?
- Ça peut être fait à l'école élémentaire quand... on est dans une classe où ça passe bien. Moi, il y a eu des difficultés visiblement sur les fractions, et la numération, je n'ai pas vraiment beaucoup insisté sur les fractions. Là je ne l'ai pas fait, mais c'est plutôt du collège.
JB- La 9...

- Les unités conventionnelles, oui bien sûr. Et à poursuivre. Ce n'est pas une certitude.
JB- La 10...
- Je l'ai faite...
JB- Tu l'as faite simplifiée. Là, il y a un aspect qui est systématique, les multiplicateurs ne sont pas forcément simples. Il y a un groupe où c'est : ce qui fait 4 donne 8. Toi, tu as fait quelque chose du même genre. Ce qui fait 4 donne 10, là c'est un petit peu plus compliqué ; ce qui fait 4 donne 7, qui est un peu plus compliqué.
- Moi, j'en avais un qui était compliqué : 6 donne 12, 6 donne 9 et 6 donne 8.
JB- Donc tu as fait quelque chose qui est tout à fait dans le même genre, tu n'as pas simplifié.
- Tout à fait dans le même genre.
JB- Tu n'as pas simplifié, tu as adapté, tu as des nombres qui donnent des multiplicateurs qui ne sont pas simples. Et là, tu considères que tu peux le faire en CM2 ?
- Je peux le faire en CM2. 6 donne 12, ça passe bien. Mais 6 donne 9 et 6 donne 8, il y en a... 3 dans la classe qui ont eu immédiatement la perception, mais comme ils n'avaient pas la certitude, ... mais comme il y avait d'autres qui disaient, mais tu vois bien, on ajoute 3,
JB- Mais l'énoncé est fait justement pour ça.
- Evidemment alors, mais non ça marche pas !, mais non, tu as mal fait ta forme.
JB- Mais c'est forcé, le conflit additif/ multiplicatif, l'exercice est bâti pour ça... Donc si tu n'avais pas eu d'erreur, c'est que quelqu'un leur aurait filé la solution. (rires). La question est de savoir si c'est trop élevé pour ta classe primaire ?
- Alors 6 donne 9 et 6 donne 8, j'ai eu beaucoup de mal. 6 donne 12, c'est passé. Après, je leur ai donné 6 donne 3, et c'est passé beaucoup plus facilement.
JB- Ils ont quand même vu l'obstacle... de 6 donne 9 et 6 donne 8.
- D'avoir vu 6 donne 3, ça les a aidés. Ils ont dit : "6 donne 9", on ajoute la moitié.
JB- C'est un intermédiaire intéressant. Et pour 6 donne 8,
- 6 donne 8, on est resté un peu dans le flou et on a montré qu'il y avait une fraction en fait.
JB- Donc, l'exercice aménagé, il est bien pour un CM2.
- Oui, il est bien, c'est une belle situation de recherche.
JB- Celle-ci qui a en plus des gestions d'arrondis [suggestion 11] ?
- Je n'ai pas fait du tout.
JB- Il y a des gestions d'arrondis. C'est plus compliqué que celle-ci, parce que non seulement tu fais des calculs de proportionnalité, mais en plus, si tu tombes dans un calcul de proportionnalité sur un nombre avec 4 chiffres après la virgule, qu'est-ce que tu fais de tes 4 chiffres, comment tu te débrouilles pour dessiner ? Donc, tu as en plus des gestions d'arrondis. (silence) Cela te semble faisable à l'école primaire ?
- J'ai eu des arrondis là aussi. C'est-à-dire qu'il n'y a pas d'arrondi à faire à partir du moment où on sait qu'il y a des angles droits et que toutes les.... tous les côtés de l'angle droit sont entiers. Mais par contre, ici, ici, ici [côtés "obliques"], on a des arrondis. Il y a des enfants qui se sont contentés de construire tout ce qu'il y avait autour de l'angle droit et qui ont compris que le dernier, on l'avait tout simplement par construction. Et il y en a qui ont cherché et qui sont tombés dans...
JB- Effectivement, s'ils mesurent et s'ils cherchent le multiplicateur..., oui, ils se sont posé une bonne question !
- Et ils sont arrivés à des nombres qui n'étaient pas... des nombres non décimaux...
JB- Arrondis avec les obliques, donc. Ici [suggestion 11], c'est une situation qui n'est faite que pour les arrondis, parce que ce côté-là et ce côté-là de la cheminée sont faits pour que ça soit des arrondis. Parce que tu as des angles que tu peux calculer avec un cosinus ou un sinus, mais comme on fait ça sans cosinus, et sans sinus, on prend des valeurs approchées. La dernière [suggestion 12] ?
- Non, je la vois au collège et même plus cinquième que sixième.
JB- J'oubliais sur la 10, pour l'agrandissement, tu as fait le début, mais pour la fin ?
- Je n'ai pas faite.
JB- Tu ne le situes pas à l'école primaire ?
- Non, pas vraiment à l'école primaire (silence). De toutes façons, on se retrouve avec des multiplications par des fractions, des doubles multiplications par des fractions, ou fractions et décimales.
JB- Ça suppose, c'est vrai, déjà une certaine aisance.
- Ils n'ont pas d'aisance sur les fractions. Ils ont envisagé les fractions, c'est tout.

JB- Quelles sont celles que tu es prêt à reprendre l'an prochain, avec une classe de niveau moyen, un peu ce que tu as l'habitude de faire ?
- Tout ce qui est calcul mental, je reprendrai... les grandeurs familières, je reprendrai, l'ordre de grandeur. Fractions ? .... oui... si j'avais un CM2, mais de façon modérée, toujours. Addition... a priori pas trop [suggestion 4]. Division euclidienne, pourquoi pas ? Je ne l'ai pas fait là, cette année, mais pourquoi pas ? Les problèmes additifs, soustractifs et multiplicatifs, oui....Euh....non.
JB- La 9, il me semble que tu avais dit un petit peu ?
- Oui, un peu. La 10, oui celle-ci, je resterais sur celle-là et le reste non. Même si pendant un moment j'ai étudié les fonctions numériques au départ, avant de faire la proportionnalité, je voyais ça plus mathématiquement comme une fonction numérique. Et j'ai un petit peu abandonné ça, parce que j'avais l'impression de me faire plaisir moi mathématiquement, mais que les enfants...
JB- C'est intéressant, mais il faut mettre le paquet longtemps. Il y a un problème.... je crois qu'il faut passer beaucoup de temps pour en tirer profit. Qu'est-ce que tu penses du travail que tu as fait pour moi durant cette année ? Tu as une opinion, tu as envie de dire des choses, tu as des commentaires qui te viennent ?
- Qu'est-ce que je pense du travail...
JB- Que je t'ai demandé de faire.
- Il y a pas mal de travaux que tu proposais qui m'étaient pour moi naturels et obligatoires, je pense à tout ce qui est calcul mental, je pense à la présentation de l'agrandissement du puzzle, c'est une séquence de ce type-là que je varie un peu... mais que je fais souvent. J'avais commencé sur le tangram complet, c'était beaucoup... Il y a 2 ou 3 ans, ça faisait beaucoup trop. Et déjà rien que de refaire le tangram, je n'y arrivais pas. Et je travaillais toute l'année sur le tangram, du début à la fin de l'année, et on faisait des pavages avec le tangram. Mais quand on arrive à l'agrandissement du tangram, c'est vraiment trop dur, parce qu'il y a vraiment trop de pièces (rires) ! Donc je faisais ça aussi avec une figure simplifiée au départ. J'avais au départ 4 pièces.
JB- L'intérêt, si tu veux, pour les procédés additifs, quand tu fais + 3, quand tu as par exemple 6 donne 9, ici tu agrandis ça fait + 3 + 3, donc ça fait 6, et ici comme il y a 3 pièces, tu fais + 3 + 3 + 3, et tu as un élément de contrôle en disant que l'agrandissement du haut, il doit être comme l'agrandissement du bas. Il a été fabriqué un petit peu pour que... mettre en défaut certains raisonnements des gamins.
- En fait, j'avais détourné le tangram pour avoir 4 pièces différentes. J'aime bien ça.
JB- Donc en gros...
- Inventer des problèmes, c'est quelque chose que j'ai toujours fait.... Euh ... ça c'est quelque chose que je faisais, je savais (inaudible).
JB- C'est vrai que comme on a travaillé ensemble et que mes sources d'inspiration d'avant, c'est à peu près les mêmes, sauf que là je les ai un peu systématisées. Mais sans doute comme on avait... comme tu as l'habitude de travailler les maths, je pense que tu as dû avoir une certaine homogénéité d'esprit.
- Tout à fait.
JB- Ce n'était pas trop lourd ?
- Non, il y avait des séquences que j'avais l'habitude de faire et que j'ai changées ou que je n'ai pas faites pour aller, pour faire ça, mais ça allait dans le même sens.

ENTRETIEN AVEC UN ENSEIGNANT DE COLLÈGE

Formateur homme, lien avec DEP, 7 ans d'ancienneté, collège n° 1, sixième, niveau moyen, 27/6/95

(Le début de l'entretien porte sur le fait que les élèves de cet enseignant n'ont pas subi le test de fin d'année)

- En principe je devrais retrouver les mêmes élèves l'an prochain, je devrais retrouver 80 % des élèves à peu près. Et j'avais envisagé pour moi en début d'année de cinquième, pour comparer au début de sixième, avec les résultats de *Casimir*. [1]
JB- Sans doute ce sera...
- La seule différence, c'est que ce sera après les vacances.
JB- Il y aura une perte.
- Il y aura une perte. Mais ce qui sera intéressant, c'est qu'ils seront dans les mêmes conditions que pour le test de sixième. Donc là, ça peut être intéressant à regarder. Du moins c'est ce que je ferai. Eventuellement, si ça vous intéresse, je vous enverrai les résultats, juste pour confirmer ce que l'on va dire.
JB- Pour moi, en fait, ce deuxième test est plutôt un test de confirmation de mes impressions.
- D'habitude, nous on fait aussi quelque chose, on ne reprend pas exactement les intitulés de début d'année, mais sous une forme ou sous une autre, on aime bien retester les points, ce genre de points en fin d'année. Cette année on n'a pas pu l'organiser sur l'établissement, et malheureusement je n'ai pas pu le faire sur mes classes.
JB- Pour moi, ce n'est pas l'essentiel du travail, puisque l'essentiel, c'est surtout ça [suggestions]. Mais ce qui m'a intéressé, je ne vous ai pas envoyé ça, j'ai fait la comparaison entre les 4 niveaux que j'ai et les résultats nationaux, et la moyenne des sixièmes est aux alentours de 10 % à 15 % plus faible que la moyenne nationale, les sixièmes avec qui je travaille.
- Est-ce que c'est des sixièmes... elles ne sont pas toutes issues de l'académie de Créteil.
JB- Presque toutes.
- Parce que moi j'ai les résultats de l'académie de Créteil, et c'est en deçà des résultats nationaux. Je peux vous donner le détail sur Créteil, sur les items que vous me signalez. Je peux vous le donner.
JB- Je veux bien.
- Ils sont toujours inférieurs à la moyenne nationale et je peux vous donner aussi les ZEP de l'académie qui sont encore un petit peu inférieurs.
JB- Sur l'académie de Créteil, je travaille sur votre établissement, sur J. P., qui n'est pas ZEP mais qui a une population tout à fait de type ZEP. Et je travaille à V. pour lequel ce n'est pas du tout ZEP, avec une classe ordinaire et une classe de soutien.
- Donc une classe en difficulté.
JB- C'est important pour moi, parce que quand des gens me disent : cette fiche ne me va pas..
- Elle est trop difficile, c'est vrai que c'est peut-être spécifique d'un environnement..
JB- Pour moi c'était important de voir...
- Surtout pas au niveau des activités, mais sans doute au niveau des intitulés, les consignes, par exemple, ou des choses comme ça. Les gens seront quand même amenés à modifier les intitulés de façon radicale, parfois, dans beaucoup de cas.
JB- Des intitulés de...?
- Des activités, c'est-à-dire la façon dont vos activités sont décrites dans ces fiches. Si on les donne effectivement sous cette forme-là, 90 % des élèves ... que j'avais en particulier ne comprennent même pas de quoi il s'agit. Il y en a toujours qui s'en sortiront, mais il y a plus de la moitié des élèves qui seront incapables de commencer l'activité. Ça veut dire qu'effectivement que si on regarde ces fiches comme des fiches prêtes à l'emploi, comme... beaucoup de fiches qu'on a... chez les éditeurs etc., on se retrouve effectivement coincé parce que les élèves ne démarrent pas les activités. C'était ce qui c'était passé sur certains problèmes que j'avais donnés, dont on avait un peu parlé, qui avaient bloqué les élèves immédiatement parce qu'ils ne comprenaient même pas le genre d'activités etc. Alors que les

[1] Logiciel de saisie et de traitement local des données relatives à l'évaluation de début de sixième.

mêmes activités, mais diluées, sous forme d'activités préparatoires, où on commence à leur parler de l'environnement dans lequel ils vont travailler, finalement redeviennent des activités réussies par la majorité des élèves. Donc c'est peut-être une chose qu'il faudra ... peut-être repréciser aux futurs utilisateurs de ces fiches (rires).
JB- En tous cas pour moi...
- Le fait que vous ayez eu surtout des établissements avec une population peut-être un peu difficile...
JB- En sixième. CM1, CM2, non, c'est moyen. CM2, j'ai même des élèves en lien avec le conservatoire de musique de V., des élèves qui crèvent le plafond. J'ai aussi des classes d'application, donc des gens qui ont l'habitude de travailler avec moi et par conséquent... De toutes façons, ce que je fais n'a pas de caractère statistique, c'est de nature qualitative, mais je crois que j'ai eu raison quand même de faire ce test de début d'année. Le test de fin d'année, j'en aurai suffisamment à mon avis pour voir... Ça fait partie des aléas [2], de la même manière que j'étais partie l'an dernier, en me disant j'ai trop de gens avec qui travailler, il y a eu des tas de gens qui ont eu un problème personnel et qui ne viennent pas, ça fait partie des aléas. Donc le but d'aujourd'hui, c'est de faire le bilan de l'année, de faire le point de tout ce que vous avez utilisé, et de reprendre chacune des fiches pour voir quel est le niveau... le niveau optimum dans une classe ordinaire. Je n'ai pas revu toutes mes notes, mais vous vous souvenez sûrement des fiches que vous avez utilisées. Au moins en partie.
- Je les reprends dans l'ordre. La 1, oui. La 2, pas intégralement.
JB- Je me souviens qu'on avait pas mal discuté des tickets de caisse.
- Oui, ça avait bloqué sur des choses qui semblaient aller de soi. Alors la 3, non, la 4 non plus. La 5 non plus. La 6, un tout petit peu, en partie. La 7, je n'ai pas utilisée, je n'ai pas eu le temps. Sur les unités je n'ai rien fait en sixième.
JB- Donc, les suggestions 8 et 9, c'est non.
- L'agrandissement du puzzle, en général, c'est plutôt cinquième, donc je ne l'ai pas fait en sixième. Et je n'ai pas du tout utilisé la 11. Et la 12, j'en ai un peu parlé, mais pas sous cette forme-là. Je ne peux pas dire que je l'ai utilisée. Mais j'en ai effectivement... un peu parlé sous une forme un peu différente.
JB- Sur le plan de la lisibilité des fiches, qu'est-ce que vous avez à faire comme commentaire ?
- Sur les fiches que j'ai utilisées vraiment cette année, les autres, on en parlera sous une autre forme, sur celles que j'ai utilisées cette année, moi je les ai trouvées claires, dans leur objectif... dans leur partie théorique sous-jacente, je pense que c'est assez clair, vous avez bien réussi à indiquer les objectifs des activités. Le fait d'avoir des consignes qui sont... je dirais ... éventuellement utilisables telles quelles, ça peut donner une bonne illustration de ce qu'il faudrait dire pour démarrer l'activité... moi j'avoue que celles que j'ai utilisées, je me suis fortement inspiré des exemples fournis dans la fiche. Dans certains cas, j'ai repris intégralement l'intitulé des énoncés.
JB- Vous disiez tout à l'heure à propos des consignes qu'il fallait les reformuler.
- Par contre, voilà, ce qui me semble très clairement évident, il faut constamment, de toutes manières, reformuler, je dirais, le... la consigne... de façon à... s'adapter à sa pratique vraiment courante et quotidienne et à sa façon de faire fonctionner la classe. Je suis persuadé qu'effectivement une consigne qui est ici... donnée... dans toutes les classes où cette fiche a été utilisée, je pense qu'on n'a pas forcément donné la même consigne et le même point de départ... et souvent, c'est ce que je vous disais, si on donne ça comme consigne, dans certains cas il y a des élèves qui ne démarrent pas l'activité. c'est évident.
JB- En fait, moi je la mettais pour que... c'est une autre manière d'illustrer l'objectif.
- Voilà. Moi je l'avais compris comme ça.
JB- Je mets un objectif avec une présentation, je mets un objectif éventuellement avec un bilan. Alors la consigne, en mettant dans la tête,
- J'avais compris que ça donnait un cadre à l'activité, et que ce n'était qu'un cadre.
JB- Effectivement, je voulais absolument que les gens se sentent libres, y compris ..
- Je pense que c'est clairement dit, en tous cas ce n'est pas un problème d'adapter ce genre d'activités à sa pratique personnelle. Ce n'est pas un problème du tout, ça ne m'a pas du tout gêné. D'ailleurs on a beaucoup d'activités qu'on

2 Allusion au fait que les élèves de ce professeur n'ont pas pu subir le test de fin d'année.

retrouve... exposées dans ces fiches qui sont des activités qu'on avait plus ou moins... déjà menées ou qu'on avait l'habitude de mener sous une forme un peu différente. Donc là, par contre, l'avantage, c'est qu'on a d'autres exemples peut-être plus pertinents que ceux qu'on aurait développés, nous, parce qu'on n'a pas toujours réfléchi au détail des exemples, donc je me suis beaucoup inspiré des exemples que vous fournissez.

JB- Est-ce qu'on peut revoir toutes les fiches avec le niveau privilégié, en disant c'est trop primaire, et ça même pas cinquième plutôt quatrième...

- En ce qui me concerne le niveau de ces fiches, il n'y en a pas une seule que j'ai trouvée facile a priori. Elles sont toutes d'un niveau que je considère minimum sixième, bien que je sache qu'un certain nombre d'activités soient pour certains collègues de primaire des activités standards, classiques, simples pour eux, moi je sais que derrière se cachent de réelles difficultés et pour moi elles sont pour moi largement de ce qu'on peut faire en sixième. Donc, parmi les fiches, on va les reprendre, la première me paraît parfaitement adaptée à des activités de sixième, moi je suis très content sous cette forme-là, parce que c'est tout-à-fait le genre d'objectifs que je vise en sixième, et qui montre que les élèves sont souvent en difficulté sur ce genre d'activités en sixième, alors que ça semble être un des acquis qu'on pourrait exiger arrivant de primaire, je dirais, or il est clair que ce n'est pas du tout acquis pour beaucoup d'élèves, et qu'il y a, même pour ceux qui s'en sortent bien, il y a encore des points où ça bloque.

JB- J'ai même eu là-dessus +10, +100.

- Mais oui, la moindre de ces activités pose problème. Donc il faut en faire en sixième, je crois que c'est tout à fait adapté, dans l'ensemble. La deuxième, c'est tout à fait au niveau sixième..., euh... les grandeurs familières sont encore une fois quelque chose qui est loin d'être intuitivement... acquis, contrairement à ce qu'on peut croire. C'est vrai qu'ils manipulent les 3,50 F par exemple, c'est vrai que j'ai encore beaucoup d'élèves qui étaient incapables d'expliquer clairement ce 50 centimes, même s'ils le sentent bien intuitivement, ils sont incapables de dire ce que c'est que 50 centimes, ou 50 centimètres. Alors qu'on avait travaillé justement sur la numération décimale, le fractionnement de... la base dix en gros... mais le lien entre les nombres, la numération et les grandeurs utilisées... ça ne passe pas du tout, et je pense que là aussi en sixième, c'est très important de reprendre ça sous forme de ce genre d'activités. En plus cette activité leur a paru tout à fait intéressante et ils l'ont faite avec plaisir, ces petits problèmes, ils les ont faits de façons assez diverses, d'ailleurs, ils les ont résolus de façons assez diverses, mais ça n'a pas posé de difficulté majeure à faire, par contre l'objectif est bien ciblé.

JB- Et la partie 2 qui porte aussi sur la gestion de l'arrondi, est-ce qu'elle est située aussi en sixième ?

- Là, il y a une question qui est bien posée en sixième, en tous cas une question qui m'a arrêté dès le début, l'utilisation de la proportionnalité en gros dans ce genre de situation, semble très très très dangereux en début d'année de sixième ou en cours d'année de sixième, euh... c'est manifestement là un gros nœud, un énorme nœud de difficulté pour les élèves. Nous, nous avons là, au niveau de la gestion des programmes, une politique qui est très claire là-dessus. En sixième, on ne fait aucun cours spécifique sur la proportionnalité, les quelques éléments dans le programme. Tout se passe sous forme d'activité au cours de résolution de problèmes, de choses comme ça, on essaie de faire sentir intuitivement cette histoire de proportionnalité, mais.. ça marche dans des situations je dirais très simples, très ciblées, et ça devient très difficile pour eux dans des situations où les décimaux interviennent de façon aussi évidente que les prix, les kilos, les prix-poids, des choses comme ça, où ils ont été complètement perturbés, ils n'ont pas démarré un seul problème, parce qu'ils étaient incapables de savoir calculer d'une quantité quelconque connaissant le prix au kilo.

JB- J'ai eu des classes qui m'ont dit que le modèle de l'addition répétée... est premier dans la multiplication, et en gros comme dans la multiplication des décimaux, l'addition répétée ne marche plus, il faut avoir un modèle de proportionnalité et non pas un modèle d'addition répétée, un certain nombre m'ont dit que pour les problèmes d'avant y compris pour les 4 yaourts, c'était 125 + 125 + 125 + 125, et qu'ils n'avaient même pas... qu'ils continuaient à avoir une désignation d'addition

répétée et que la désignation multiplicative a été oubliée en CM1, en CM2, en sixième. Ici, l'addition répétée ne marche plus, alors on n'a plus rien à dire.
- Ça bloque complètement.
JB- En plus, il y a dans cette affaire, l'affaire des nouveaux programmes de l'école élémentaire.
- Finalement, ça voudra dire que maintenant un élève de sixième ne sera plus capable de gérer ce genre de situations.
JB- A partir de l'an prochain (rires). Je fais la guerre contre cette imbécillité, parce que...
- De toutes façons, quelle que soit la façon dont ils ont géré ça à l'école primaire, c'est manifestement quand même quelque chose qui n'est pas naturel. C'est finalement peut-être un des gros acquis mathématiques chez ceux qui passeront cette étape-là, parce que c'est vrai que la façon naturelle de voir les choses, c'est effectivement on coupe en morceaux et on additionne des quantités etc. Donc là, la vision intuitive qu'on instaure en sixième est très vite en fait limitée par ce genre de situations. D'ailleurs, le problème est important aussi en cinquième quand on aborde les problèmes de proportionnalité, ça devient pour certains un problème de pure technique où il y a un savoir-faire qui est mis en jeu "point final". Et 80 % des élèves qui arrivent, il y arrivent finalement, parce qu'ils ont appris le savoir-faire.
JB- Ce qui voudrait dire qu'il y a quand même une différence de niveau entre la partie 1 et la partie 2, et que la partie 2, peut-être qu'elle n'est pas au même moment, si elle est faite en sixième.
- Voilà, je détacherais très clairement la deuxième partie,
JB- Pour en faire quelque chose d'autonome,
- Complètement.
JB- A un autre moment de l'année ? En sixième quand même ?
- Là, moi ça ne me gênerait pas de le faire en sixième à un autre moment de l'année, sans pour autant que ce soit systématiquement par ça que je commencerais ce genre d'activité. Je pense que... je pense qu'il est effectivement nécessaire de ne pas faire les deux activités dans le même laps de temps, parce que pour les élèves ce n'est pas du tout les mêmes enjeux. Par contre, ce qui est intéressant, c'est de leur monter que là ils sont bloqués, alors que là ils n'étaient pas bloqués, et de voir pourquoi ils sont bloqués. Et moi finalement c'est comme ça que j'ai utilisé l'activité, c'est-à-dire ils m'ont dit : on ne sait pas faire ! Je leur ai dit : mais pourquoi vous ne savez pas faire ? Alors ils ont eu beaucoup de mal à me dire pourquoi. En fait, ils ne savaient pas pourquoi ils ne savaient pas faire. A la limite, finalement ce qui m'a intéressé, c'était de faire apparaître pourquoi c'était différent de précédemment.
JB- Et puis, c'est vrai il y a là en plus la gestion de l'arrondi, alors que dans la première partie, il n'y pas non plus de gestion d'arrondi.
- Ce qui serait intéressant de faire en conclusion de la première partie, ce serait de proposer une activité du type 2, plus simple, mais qui continue de bloquer, de leur poser un problème, mais plus simple quand même, de façon à ce que par tripatouillage ils s'en sortent quand même, mais qu'ils sentent bien que ce n'est pas les mêmes stratégies, et ça leur envoyer un peu plus tard dans l'année, en fin d'année. Mais je pense qu'il est intéressant quand même de leur montrer qu'il y a un moment où leur stratégie va bloquer.
JB- Oui, la stratégie de l'addition répétée ne marchera plus. Donc, cette fiche-là, encore sixième, mais découpée si je puis dire.
- Je pense. Quant à la partie 2, moi je la reprendrais sans problème en cinquième comme activité d'application ou de réinvestissement d'un certain nombre de choses. Ce n'est pas un problème, non plus, de la reprendre plus tard.
JB- La suggestion 3 ?
- La suggestion 3, moi je ne l'ai pas utilisée cette année en sixième. Par contre, c'est une activité que je vois très bien en cinquième, lorsqu'on redémarre les fractions en cinquième, c'est une activité assez intéressante, parce qu'elle est très différente de la manière dont on a travaillé sur les écritures fractionnaires en sixième cette année, en particulier en ce qui me concerne. Et donc ça me permettra... donc je pense que je vais l'utiliser dès l'an prochain, puisque je vais avoir une classe en cinquième, je pense que je la reprendrai sans problème en cinquième, puisqu'elle me permettra d'éclairer sous un autre jour, en complément des acquis de sixième, d'éclairer à nouveau cette notion de fraction.
JB- De la reprendre sous une autre forme ?
- C'est-à-dire en fait de prolonger les

activités sur les fractions cette année. Moi en fait cette année, je n'ai pas différencié fractions d'écritures fractionnaires ou de... quotients, j'ai groupé le tout. Je n'ai pas fait d'abord le quotient et après les fractions... J'ai travaillé sur cette notion de nombres avec différentes écritures, sous forme de quotient, avec passage de l'écriture sous forme de divisions à l'écriture sous forme de trait de quotient. Par contre, ce que je n'ai pas vraiment travaillé cette année, c'est l'aspect, je dirais..., très manipulatoire des choses, de faire fractionner des unités, des choses comme ça. Par contre, ce qu'ils ont bien, normalement, acquis, mais je n'ai pas de certitude absolue à ce niveau-là, c'est cette notion de finalement un nombre, des écritures, et on utilise différentes écritures en fonction des situations. Ce qui me plaît bien ici, c'est que les fractions interviennent ici sous forme de... de quantités, de nombres qu'on peut manipuler, additionner, on peut faire des opérations avec, on peut aussi représenter les choses de façon très... très simple, très concrète, ça me paraît très intéressant de reprendre ça si on ne l'a pas fait en sixième, de le faire sous cette forme-là en cinquième.

JB- Ce que j'avais vu sur les fractions, c'est que dans le programme de sixième je ne voyais pas quelles pouvaient être les situations où on était amené à faire des comparaisons entre les fractions et les entiers. Je n'arrivais pas à trouver...

- C'est vrai que la façon dont.... moi je trouve que la notion de fraction dans le programme de sixième est une notion particulièrement difficile à mettre en place si on suit le programme. A aucun moment, cette notion de fraction n'intervient de façon clairement mathématique, ça devient, bon, si on regarde les manuels, c'est on fait des petits découpages, mais par exemple, le problème de représenter une fraction plus grande que 1, tout de suite on est bloqué, le problème de savoir ce qu'est la fraction 4 sur 4, par exemple, on est bloqué. Cette notion de comprendre qu'un nombre c'est finalement une partie entière et un petit résidu de quelque chose, ça n'apparaît pas non plus, et c'est vrai que ça me gêne profondément aussi. C'est vrai que c'est en cinquième qu'on travaille là-dessus, mais ça me paraît plus important de commencer en sixième à montrer qu'une écriture, un nombre, c'est différentes écritures etc. qu'il y a l'écriture décimale, qu'il y a l'écriture etc. que finalement cette notion de quotient, qui est une notion extrêmement complexe pour un élève de sixième, puisqu'avant qu'il comprenne cette histoire de... de nombres qui n'ont pas d'écriture décimale, ouh, c'est assez galère, quand même. En particulier qu'il y a certains quotients qu'on ne peut pas écrire autrement que sous cette forme-là, et que si on veut en donner une autre forme, il faut donner un encadrement ou une valeur approchée, mais qu'est-ce que c'est une valeur approchée ? quelle est la signification du petit symbole valeur approchée ? c'est ce genre de questions qui en sixième m'intéressent. L'intérêt donc en cinquième quand on reprend le travail sur les fractions, c'est justement de réinvestir ça sous cette forme-là, finalement on regarde par rapport aux nombres qu'on manipule, on peut faire tout ce qu'on veut, on peut faire des opérations, on peut les comparer, on peut faire des choses, et cette activité me plaît bien.

JB- Oui, dans le bouquin de Brousseau, il rappelle que les fractions, ça a deux origines historiques, les opérateurs, la proportionnalité, et puis les mesures de grandeurs. Le point de vue qui est adopté en sixième est plutôt celui de la proportionnalité, donc le multiplicateur, l'opérateur, mais moi je me suis toujours demandé comment on arrivait à dire ce qu'était qu'une approximation quand on n'avait pas de distance entre les nombres...

- On ne peut pas.

JB- J'ai posé la question à X.[3]. Il m'a dit : tu prends ta calculatrice. Je lui ai dit : mais si mes deux nombres sont proches et que sur la calculatrice, je ne vois pas l'écart, qu'est-ce que je fais ? Je lui ai dit : la structuration additive n'est pas suffisamment installée pour qu'on puisse parler d'approximation. Pour moi, l'approximation, je suis désolée, c'est lié à une structuration additive. Ce qui fait que... c'est un choix qui a été fait en sixième, le choix de mettre l'accent sur le quotient décimal en tant qu'il exprime un multiplicateur dans un problème de proportionnalité, c'est un choix, mais je trouve que du coup il y a toute une série de questions pour lesquelles on n'a pas d'illustrations commodes.

- On n'a pas de moyen d'appréhender cet

[3] Professeur d'université, membre du groupe technique disciplinaire du conseil national des programmes.

aspect-là de façon très naturelle, qui est un problème des plus complexes pour les enseignants du collège. L'autre jour, avec des élèves de quatrième et de troisième qui travaillaient sur un projet de mathématiques, de recherche, qui faisaient une petite conférence bilan de leur travail, et ils employaient tout le temps le signe environ, parce qu'effectivement, racine de 2 sur 3, par exemple, pour eux ce n'est pas un nombre, donc il leur faut ce que ça représente. Ils devaient comparer deux nombres écrits sous cette forme-là, donc ils étaient embêtés, ils ont pris leur calculatrice, ils ont obtenu des valeurs approchées, et pour eux, c'est environ, puis l'autre, c'est environ... Et puis il y en a quelqu'un qui a insisté et qui leur a demandé : ce signe-là, qu'est ce que ça veut dire ? Ça veut dire que c'est une valeur approchée. Oui, mais c'est quoi une valeur approchée, parce que moi π je peux prendre 1 comme valeur approchée ! Alors là, ils n'ont pas compris la question. Ils n'ont pas compris que c'était au fond... c'était au fond un vrai problème. La calculatrice affiche quelque chose mais on ne sait pas quoi ni comment, et qu'est-ce qu'on écrit quand on écrit ça ? Et ça c'est un sujet dont on ne parle pas.

JB- J'ai posé la question à de futurs instituteurs : quel est le vingt-cinquième chiffre après la virgule de je ne sais plus quoi avec un quotient. Comme la calculatrice fait des arrondis, c'était faux. Je leur ai dit : "Méfiez-vous, le dernier chiffre est arrondi, donc il faut vous débrouiller. Il faut vous débrouiller pour savoir quels sont les bons chiffres, vous savez que le dernier est peut-être arrondi. Il faut vous débrouiller. C'est abominable ! Oui, c'est abominable..., mais vous pouvez y arriver avec votre calculatrice... c'est fait exprès ! ". En fait, je divise par 2048, et ça s'arrête bien avant... Mais je me débrouille, je pose le problème...

- Mais c'est vrai que c'est un sujet qui n'est pas abordé au collège. Le problème, il est abordé au moment où on introduit racine de 2.

JB- Je crois que tout le monde en parle, mais personne ne le traite. Parce que ça apparaît en sixième, ça apparaît en cinquième, il n'y a pas de situation pédagogique qui dise la différence entre le calcul exact et le calcul à la calculatrice.

- Non et cette notion d'approximation, justement au travers de nombreuses fiches, on y arrive à travers finalement certains nombres, on peut les approcher, à droite, à gauche. Et je pense que ce sont ces idées-là toutes bêtes qui peuvent nous permettre de donner quelques réponses à ces histoires de ce qu'affiche la calculatrice.

JB- Je ne sais plus où on en est, on a un peu dérivé par rapport à celle-ci... Celle-ci, c'est donc pour revoir sous une autre forme les fractions avec les cinquièmes.

- C'est comme ça que je l'utiliserai l'an prochain, c'est sûr. Celle-ci aussi [la 4], je pense que je l'utiliserai en cinquième. Un calcul d'estimation, c'est tout à fait dans l'esprit de cinquième, et qui refait travailler l'esprit dont on parlait.

JB- La 5 ?

- La 5, elle est parfaite en cinquième, c'est parfait, c'est très intéressant, justement, cela me paraît un bon travail à donner en cinquième sur cet aspect-là.

JB- Il fait effectivement la jonction entre l'écriture fractionnaire et l'écriture décimale, avec le système de l'encadrement. Elle a été essayée en cinquième l'an dernier à V.. Le collègue a été content.

- Je pense que c'est intéressant. La 6, je ne l'ai pas utilisée, elle me semble pertinente en sixième. C'est tout à fait intéressant, cette histoire de travailler sur les énoncés, finalement sur cette espèce de classification des problèmes, c'est intéressant comme enseignant de faire varier les énoncés, et il y a à nouveau quelques bonnes idées qu'on a tendance à oublier un petit peu, qui sont des idées effectivement qu'on connaît, qu'on a tendance à oublier un petit peu ça..., et puis en plus c'est une activité, je ne l'ai pas utilisée sous cette forme-là, mais j'en ai fait quand même, en général les gamins adorent cette activité, en plus c'est une activité qui marche en général bien. Le problème, c'est que ce n'est pas facile à gérer dans une classe très hétérogène, et on a là des problèmes de gestion de classe à prévoir. Ça c'est vrai que ça fait partie de ces activités où effectivement la production de certains ne permet pas de fournir aux autres de quoi travailler, donc il faut plutôt travailler en groupe hétérogène que de laisser les élèves en activité seuls.

JB- Celle-là [suggestion 7], c'est la même chose.

- Celle-là aussi c'est très intéressant pour l'entrée en sixième, celle-ci, je ne l'ai pas utilisée du tout, par contre, je n'en ai pas fait, je n'ai pas eu le temps sur cet aspect-là, et c'est parfait en sixième, elle est très pertinente aussi. Alors on arrive à la suggestion 8, alors je n'ai pas classé, je suis un peu embêté pour tout ce qui concerne les grandeurs et tout ça, je ne sais pas, je ne sais jamais..., je pense que c'est le genre de choses qui doit être en sixième... travaillé... D'un autre côté, les élèves arrivent de l'école primaire avec a priori des connaissances là-dessus, et puis en fait on s'aperçoit très vite que les connaissances n'en sont pas vraiment, et que en fait, je ne sais pas pourquoi, c'est... ce n'est pas..., cette histoire d'unité est un problème, et finalement un centimètre, ça ne représente pas du tout une partie de quelque chose, pour eux c'est une entité, un gramme c'est une entité. Il n'y a aucun lien justement avec ce dont on parlait, c'est-à-dire ce système de numération et ce système d'autre part d'unités pour mesurer des quantités diverses et variées, etc. Ce lien ne se fait pas à aucun moment.

JB- Je crois qu'il y a un rapport multiplicatif entre système d'unités et sous-unités qui n'est pas... qui n'est pas installé. La situation, ce n'est pas dans le système décimal, c'est dans un système...

- Justement, c'est intéressant cette histoire, parce que tout est basé sur une référence, qu'il faut se débrouiller avec cette référence, et ensuite par fractionnement de cette référence se débrouiller, mais c'est important cette idée qu'il y ait une référence quelque part, et que la référence ensuite, elle soit universelle ou locale, c'est un autre problème, mais qu'il y ait une référence.

JB- C'est l'importance de l'étalon, les nombres, l'étalon et l'objet. Dans cette fiche, on étudie les relations...

- Quand je l'ai lue, j'ai dit : c'est très bien pour la sixième, c'est parfait etc. Et puis, je me suis dit : finalement, on se retrouve encore une fois dans ces difficultés à gérer des écritures qui ne sont pas des écritures de nombres classiques, et je me suis dit : cette année avec ma sixième, je ne m'en sortirais jamais. Je vais peut-être reprendre plutôt ça en cinquième quand on va travailler sur justement l'aspect un peu proportionnalité, un peu découpage, un peu fractionnement, mais je pense quand même que globalement à mon avis c'est une activité qu'on peut mener en sixième, pas en début d'année bien sûr, mais qu'on peut mener quand même en sixième, avec, je dirais, le point d'interrogation sur la capacité des élèves à gérer des écritures un petit peu délicates. Par exemple, je vois cette année, 7/3 décomposé en 1 + 1 + 1/3, il n'y en a pas beaucoup qui s'en sortiraient et qui comprendraient vraiment. Maintenant... en cinquième lorsqu'on aura abordé les fiches précédentes etc., ça passera comme une lettre à la poste.

JB- Sans doute, c'est plus dans la continuité thématique.

- Je pense que c'est tout à fait dans l'esprit, encore une fois. Mais là, au fond, ce qui est important de promouvoir encore une fois en sixième, c'est encore une fois cette idée de référent quelque part, pas seulement pour les unités, mais globalement, on a besoin de référents, sur lesquels on se met d'accord.

JB- Même du côté des pourcentages, se mettre d'accord pour savoir ce qu'est le 100 % aussi. Donc l'idée du référent, ce n'est pas forcément un objet physique, ça peut être éventuellement une autre partie. Le 9, c'est du même genre, mais avec des écritures décimales.

- Le 9, bien sûr, ça en sixième, il faut en parler, avec ces unités-là. Ce qui semble quand même délicat, c'est toujours les problèmes de longueur, d'aire, longueur-aire, c'est ça qui camoufle des difficultés sur les unités, parce que je vois au niveau des élèves... on a le sentiment que tous les élèves ont intuitivement cette notion de longueur et cette notion d'unité de longueur à peu près en place. Par contre, la notion d'aire n'est pas du tout en place, et donc l'unité d'aire, c'est encore une fois un gros problème... Si on veut évaluer une surface, comment on peut faire, voilà déjà un gros problème. C'est vrai que quand je vois un centimètre carré, par exemple, c'est vrai que pour eux ça n'a pas le même sens que lorsqu'on parle d'une centimètre pour un segment. Et donc un cm2, il y a plein d'élèves, quand je leur demande ce que ça évoque pour eux, ils sont incapables de dire clairement ce que c'est. C'est vrai qu'au niveau des unités d'aire, moi je ne parle pas trop pour l'instant des centimètres carrés en sixième, on fait beaucoup de découpage, de compter des carreaux de différentes tailles, de différentes formes...

JB- Cette année, il y a avait quelque chose d'intéressant dans les tests, où il y avait à

faire un décompte d'aire d'une partie... et il y avait un extrait.
- Il y avait une activité qui était curieusement réussie dans la première partie et ratée dans la deuxième... je ne sais plus très bien, j'avais regardé ça d'un peu près, je ne sais plus très bien qu'elles avaient été les conclusions, mais ça avait été réussi de manière nationale dans la première partie et complètement raté, même dans les bons établissements dans la deuxième partie. Or il me semble me rappeler, je dois avoir un cahier [il part en chercher], il semble me rappeler dans la deuxième partie qu'il y a une unité d'aire qui est représentée par un petit carré [il feuillette]. Non ce n'est pas celui-là. Donc le problème des unités est plus lié dans ce cas-là au passage, je dirais, au changement de dimension aussi, qu'au réellement au problème des unités...
JB- A l'école primaire, on a fait le diagnostic, on passe beaucoup trop vite à la mise en place de formules.
- Je crois franchement que si on doit avoir une liaison primaire-collège sur cet aspect-là, je crois qu'il est fondamental de se mettre d'accord, parce qu'il y en a marre effectivement de considérer que c'est évident, que c'est facile, que la notion d'aire c'est quelque chose de naturel et qu'on n'a pas besoin d'en parler. Effectivement, les élèves arrivent avec la formule permettant de calculer l'aire du disque... je suis épaté, parce que je ne sais pas déjà s'ils savent ce qu'est π, R, etc., ça m'épate, l'aire d'un rectangle, ils savent, ils ne savent pas pourquoi...
JB- Il y a un certain nombre de personnes qui ont dit que c'était... une des choses qu'on aurait pu alléger, dans la grande opération d'allégement à l'école élémentaire.
- C'était fondamental d'intervenir là-dessus.
JB- Monsieur le Directeur des Ecoles en a décidé autrement, grâce à quoi ça nous permet de faire des articles vengeurs sur le... la circonférence du cercle, puisque la multiplication des décimaux n'est plus au programme, π étant quelque chose de plus compliqué qu'un nombre décimal dont on prend en général une approximation décimale, le rayon peut-il être un nombre décimal ?
- Avec la calculatrice, tout est possible.
JB- Oui, mais on est hors programme...!
- Ça ne fait rien, la calculatrice permet d'être hors programme sans problème.
JB- En plus on a la liaison entre centimètre carré, décimètre carré et mètre carré. On se demande comment on fera la liaison entre centimètre carré, décimètre carré et mètre carré sans avoir un minimum de calcul sur les multiplications de décimaux. Ça ne tient plus debout.
- C'est un gros problème.
JB- Revenons à la fiche 9 : oui en sixième,
- Avec un préalable sur la notion d'aire.
JB- La 10 ?
- La 10, c'est une activité que je mène essentiellement plutôt en cinquième.
JB- Aussi la partie décimale que la partie fraction qui est au verso ?
- Tout à fait. Celle-ci, je la teste tous les ans. Celle-ci je ne l'ai pas testée, mais ce genre-là, c'est parfait en cinquième. Et c'est une activité qui plaît beaucoup aux élèves.
JB- Y compris dans cette partie-là où il y a des mesures qui sont exprimées sous forme de mesures fractionnaires ?
- Ça, je n'ai pas encore testé, mais ça me donne de nouvelles perspectives, parce que je n'avais jamais osé.
JB- L'idée c'est que les opérateurs sont des fractions, mais que les mesures de grandeurs peuvent aussi être des fractions.
- Voilà, c'est une chose que je n'avais jamais osée. L'an prochain, je la testerai. Je pense que là aussi, ça complète bien le travail justement sur les fractions, en même temps un nombre qu'il faut savoir gérer avec les outils qu'on a mis en place, c'est ça qui m'intéresse, au fond, c'est de réinvestir tous les outils qu'on a sur les fractions en cinquième, on commence à en avoir beaucoup, pour manipuler des quantités de ce genre, je ne vois pas pourquoi on s'en priverait. Sinon on se ramène à faire de la technique bête, standard, on arrive effectivement à former des élèves qui savent additionner, multiplier des fractions, le seul problème, c'est lorsqu'on fait le contrôle commun, par exemple, à la fin de l'année, il n'y en a plus un seul qui se rappelle les règles. Ça on passera... On arrive donc...
JB- Calculer, fabriquer, mesurer [suggestion 11] ?
- C'est une activité qui me paraît bien sûr passionnante, après tout ce dont on a discuté, je la vois bien en sixième. Par contre, le problème c'est que effectivement, je suis de plus en plus en difficulté avec la gestion du temps en sixième, et donc... je passe manifestement, je suis de plus en plus... mais

c'est peut-être spécifique de notre situation, nous passons de plus en plus de temps maintenant en sixième sur... je dirais... les thèmes sur les nombres; On est de plus en plus obligé de recommencer, de remonter de plus en loin dans les acquis, d'aller chercher de plus en loin les difficultés des élèves.
[Interruption de bande]
- En ce qui concerne les techniques opératoires, par rapport aux élèves de sixième, clairement, maintenant, avec les collègues, on a décidé de laisser tomber, pour les élèves qui ne savent pas faire d'additions, de soustractions, multiplications compliquées, on ne réapprend pas, ça ne sert à rien. Pour la division, c'est pareil, on exige de comprendre quand même le mécanisme de la technique. Ce qui m'a déjà sidéré, c'est qu'il n'y a aucun élève de sixième qui a été capable de me dire pourquoi par exemple dans une multiplication de décimaux, il y a un décalage des rangées. Aucun n'a été capable de m'expliquer ça, aucun n'a été capable de m'expliquer pourquoi le résultat avait tant de chiffres après la virgule, pourquoi est-ce qu'ils comptaient le nombre de décimales. Aucun. Bon, ça ne sert à rien de savoir faire des multiplications si on n'est pas capable de répondre à ce genre de choses. Pour la division, maintenant on a décidé ça aussi. On présente le problème de la division euclidienne, on présente le problème des divisions non entières, et puis en fait pour la technique on en reste un peu en deçà, parce que... Donc, par contre, ce qui est intéressant, effectivement, c'est ce quotient et ce reste, qu'est-ce qu'on en fait, à partir de quel moment il est pertinent de s'arrêter, eh bien, voilà le genre de questions qui sont très difficiles, et ça c'est tout à fait ce qu'il faut faire en sixième.
JB- Alors on arrive à la dernière, la suggestion 12.
- Là, je pense que, vraiment on est là... en cinquième et je dirais au-delà.
JB- Cinquième et au-delà, parce qu'il y a des graphiques, des calculs...
- C'est quand même, je dirais, une activité pour se faire plaisir avec une bonne classe de cinquième, ou une activité de quatrième pour remettre en place, je la vois très bien en quatrième, sans problème.
JB- En quatrième, oui, elle a du sens.
- On est en plein... des élèves qui savent déjà gérer un certain nombre de choses et qui les réinvestissent dans des situations effectivement un peu plus intéressantes et un peu plus originales dans leur forme, et c'est vrai que ça, ce n'est pas possible du tout de faire ça dans une cinquième...
JB- Qui n'a pas assez d'aisance dans le calcul additif et multiplicatif des fractions, ça demande...
- Effectivement, ça demande... par contre, effectivement, c'est vrai que des élèves de quatrième, c'est vraiment le genre de manipulations qu'on peut leur demander, qu'on peut exiger.
JB- Donc l'an prochain, vous avez beaucoup de choses à utiliser, aussi bien en sixième qu'en cinquième,
- Je les considère [les suggestions] maintenant comme faisant partie de mes documents de travail (rires). Je pense même que je vais m'inspirer plus l'an prochain en sixième de toutes les fiches que j'ai pas pu faire cette année, si on arrive à se mettre d'accord dans l'équipe sur la gestion du programme de sixième, c'est-à-dire de se dire : quoi qu'il arrive on limite telle partie, telle notion, parce que sinon...
JB- Oui, il y a même un moment où les gamins se lassent et les enseignants aussi.
- On ne s'en sort plus.
JB- Je voudrais vous poser aussi une question sur l'ensemble de l'année aussi d'un autre point de vue. Est-ce que vous avez une opinion sur ce que je vous ai demandé de faire pendant toute l'année, si vous avez des commentaires à faire...
- Déjà, a priori, ce que je vous avais déjà dit quand on s'est rencontré la première fois, a priori, votre idée qui était d'essayer de rendre de façon très concrète et utilisable des idées... des travaux qui avaient déjà menés depuis maintenant fort longtemps et qui n'arrivaient pas à trouver d'applications concrètes réellement chez les enseignants, semblait être une idée tout à fait passionnante. Un enseignant, moi je vois beaucoup de jeunes stagiaires en situation, [interruption par un collègue], la question qu'ils me posaient tous, c'était finalement : où trouver des supports d'activité, des documents, ce genre de choses. Ils trouvent tous que les activités que je propose sont plus intéressantes que celles qu'ils trouvent dans les livres, alors je leur dis vous n'avez qu'à aller dans les IREM, déjà, je leur dis "fouillez dans les IREM", mais

"fouillez dans les IREM", c'est facile à dire, dans les IREM, il y a à prendre et à laisser, à trier etc. Donc, il y a deux solutions : ou on va voir les textes théoriques, on se met dedans, on comprend la moitié et neuf fois sur dix, on ne comprend rien parce que le vocabulaire est absolument incompréhensible pour un néophyte. Par contre, il y a quand même des exemples d'activités, en particulier dans les textes très célèbres sur les décimaux, il y a des exemples, des supports, et à partir de là, on peut voir ce qui est sous-jacent. Mais il n'existait effectivement, je dirais, de synthèse, sinon ces fiches-là. Je trouve que ces fiches sont un premier pas sur cet aspect-là. D'autre part, le deuxième challenge, c'était : est-ce qu'elles sont utilisables ou pas, est-ce qu'elles correspondent bien à un besoin dans les classes, moi je pense que l'expérience a montré que globalement plutôt oui. Je pense que si effectivement on s'inspirait plus de ce genre d'activités et on laissait un peu de côté certaines activités du manuel, à la place, on gagnerait beaucoup en efficacité auprès des élèves, j'en suis tout à fait persuadé. Le seul problème, c'est que, si on abandonnait le manuel, c'est que les enseignants, ça leur donne beaucoup de travail personnel de recherche, de mise au point etc... Grâce à ces supports-là, on peut avoir quand même tout prêt des choses qui paraissent utilisables. Donc globalement, je trouve que c'est plutôt positif dans l'ensemble, et je suis assez content d'avoir ces fiches-là disponibles. Le tout, c'est maintenant de penser à les utiliser. Comme tous les documents qu'on a, on va les ranger, et on va les oublier. Le tout, c'est que ça reste quelque chose qui soit facilement disponible, dans les préparations.

JB- Ce n'est pas tout aussi facile les uns que les autres...

- Non. Comme je vous l'ai expliqué, il y a beaucoup de choses qui sont utilisables après avoir fait d'autres choses avant. Tout dépend de comment ce qui se passe avant, comment ça fonctionne.

JB- C'est vrai aussi que ça dépend de l'école primaire.

- Voilà. Sur les sixièmes qu'on reçoit, sur les besoins qu'on repère, les difficultés, on va être plus ou moins prêts avec ces fiches, c'est clair. Par contre, ce qui est intéressant et que je voudrais que les gens continuent de faire..., c'est vraiment de gérer les acquis de sixième en continuité avec la cinquième, et de se dire que finalement le programme de sixième que certains focalisent un peu trop, je dirais, et beaucoup de collègues font l'erreur à mon avis de vouloir faire le programme à tout prix, complètement, tout, alors qu'il est beaucoup plus sage et beaucoup plus simple de suivre... un peu les élèves de sixième et ensuite de basculer en cinquième un certain nombre d'acquis, qui me paraissent d'ailleurs tout à fait bien... clairement, puisqu'il y a un prolongement entre ces fiches, ce qui permet de finir un certain nombre d'acquisitions en cinquième, etc. Ça, c'est aussi l'aspect qui m'intéresse dans ce genre d'activités : telle fiche va être prolongée éventuellement par telle autre fiche qui sera faite en cinquième si on n'a pas le temps de la faire en sixième.

JB- C'est vrai qu'en particulier du côté du collège, je n'avais pas bien l'idée du découpage entre sixième et cinquième, parce... quand même les recherches faites par Régine Douady et Guy Brousseau ne s'inscrivent pas du tout dans la même logique que celle des programmes de sixième et cinquième. Donc trouver la place... quand je me suis posée a priori, quel niveau privilégier, j'ai eu un moment d'angoisse.

- Effectivement, il faut s'inspirer des compétences exigées en sixième et en cinquième, et puis parmi ces compétences exigées, il y en a qui sont pratiquement acquises à l'entrée en sixième et il y en a d'autres qui sont des compétences très difficiles, qui cachent de grosses difficultés et qu'il ne faut pas négliger. Effectivement ça ne sert à rien d'aller... vers une activité sans au préalable être sûr que les élèves sont capables de comprendre l'activité ou en tout cas de la démarrer..., et d'aller jusqu'au bout de l'objectif.

JB- En tout cas, j'ai été très contente du travail que j'ai fait avec les équipes expérimentales.

RESUME

La thèse examine, à partir d'une étude de cas, comment les enseignants des premiers et second degrés, exerçant dans des conditions ordinaires, tirent parti d'ingénieries didactiques. L'objet retenu est l'enseignement des décimaux en CM1-CM2 et en 6e-5e, avec, pour cadre de référence théorique, les recherches sur la reproductibilité (Artigue, 1984), les champs conceptuels (Vergnaud, 1992, Rogalski & Samurçay 1992, 1995). La thèse présente l'évolution des textes officiels depuis le début du siècle, puis l'analyse didactique comparative de quatre manuels récents et de deux ingénierie (Brousseau, Douady, Perrin), à partir desquelles douze situations pédagogiques ont été élaborées et proposées à trente deux volontaires (quinze instituteurs et neuf professeurs ont participé jusqu'au bout), sans contrainte d'usage. Des entretiens rendent compte des utilisations effectives des situations et de leur appréciation. De fait, les enseignants reprennent très peu d'éléments inspirés des scénarios pédagogiques : les éléments tirés de l'ingénierie de Brousseau paraissent peu compatibles avec la conception de l'opération algèbrique associé à un seul sens, et ceux tirés de Douady & Perrin sont étrangers à la tradition du second degré qui privilégie les techniques algébriques de calcul et ne traite pas la notion d'écart. L'écart entre recherches et pratiques ordinaires ne peut être attribué à une mauvaise diffusion des résultats ou à une résistance à priori des terrains à l'innovation, mais à des incompatibilités avec des progressions d'enseignement actuellement en place.

MOTS CLÉS

décimaux
école
collège
pratiques ordinaires

Editeur : IREM
Université PARIS VII
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Novembre 1996
ISBN : 2-86612-168-6